

PODSTAWY MECHANIKI I WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

MATERIAŁY DO WYKŁADU

Opracował: dr hab. inż. Zygmunt Lipnicki
Instytut Politechniczny
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa
W Głogowie
2010.03.15



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



PROJEKT FINANSOWANY
ZE ŚRODKÓW UNII EUROPEJSKIEJ I BUDŻETU PAŃSTWA

Literatura wykorzystana w opracowanych materiałach:

1. Misiak Jan: *Mechanika techniczna - statyka i wytrzymałość materiałów t.1*, WNT, Warszawa, 2006
2. Misiak Jan: *Mechanika techniczna – kinematyka i dynamika t.2*, WNT, Warszawa, 1999
3. Osiński Zbigniew: *Mechanika Ogólna cz. I i II*, PWN, Warszawa, 1987
4. Korzeniewski Zygmunt: *Podstawy mechaniki ciała stałego*, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1974
5. Nizioł Józef: *Metodyka rozwiązywania zadań z mechaniki*, WNT, Warszawa 2002
6. Gubrynowiczowa Janina: *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa, 1969
7. Lejko Jerzy, Szmeltera Jan: *Zbiór zadań z mechaniki ogólnej t.2*, PWN, Warszawa, 1983
8. Kowalski J. Stefan, Mielniczuk Janusz, Paszkowicz M. Agnieszka: *Mechanika techniczna dla studentów kierunków niemechanicznych*, WSP, Zielona Góra, 1998
9. Karaśkiewicz Edmund: *Zarys teorii wektorów i tensorów*, PWN, Warszawa, 1974

I. ELEMENTY RACHUNKU WEKTOROWEGO W MECHANICE.

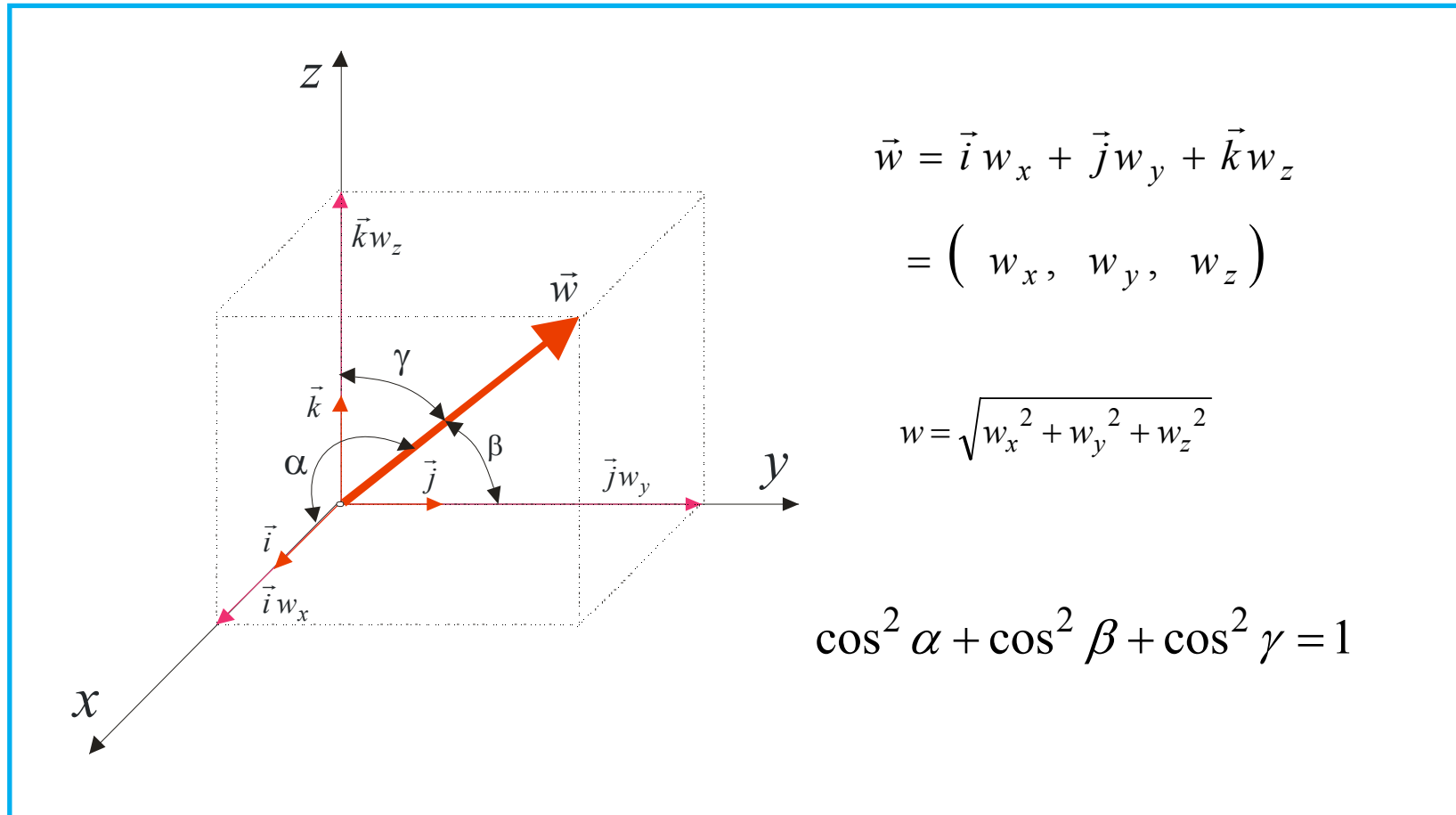
Skalary i wektory w mechanice

1. Skalar
2. Wektor i jego rodzaje:
 - wektor swobodny,
 - wektor posuwny.
3. Działania na wektorach:
 - mnożenie wektora przez liczbę,
 - dodawanie wektorów,
 - iloczyn skalarny wektorów,
 - iloczyn wektorowy wektorów.

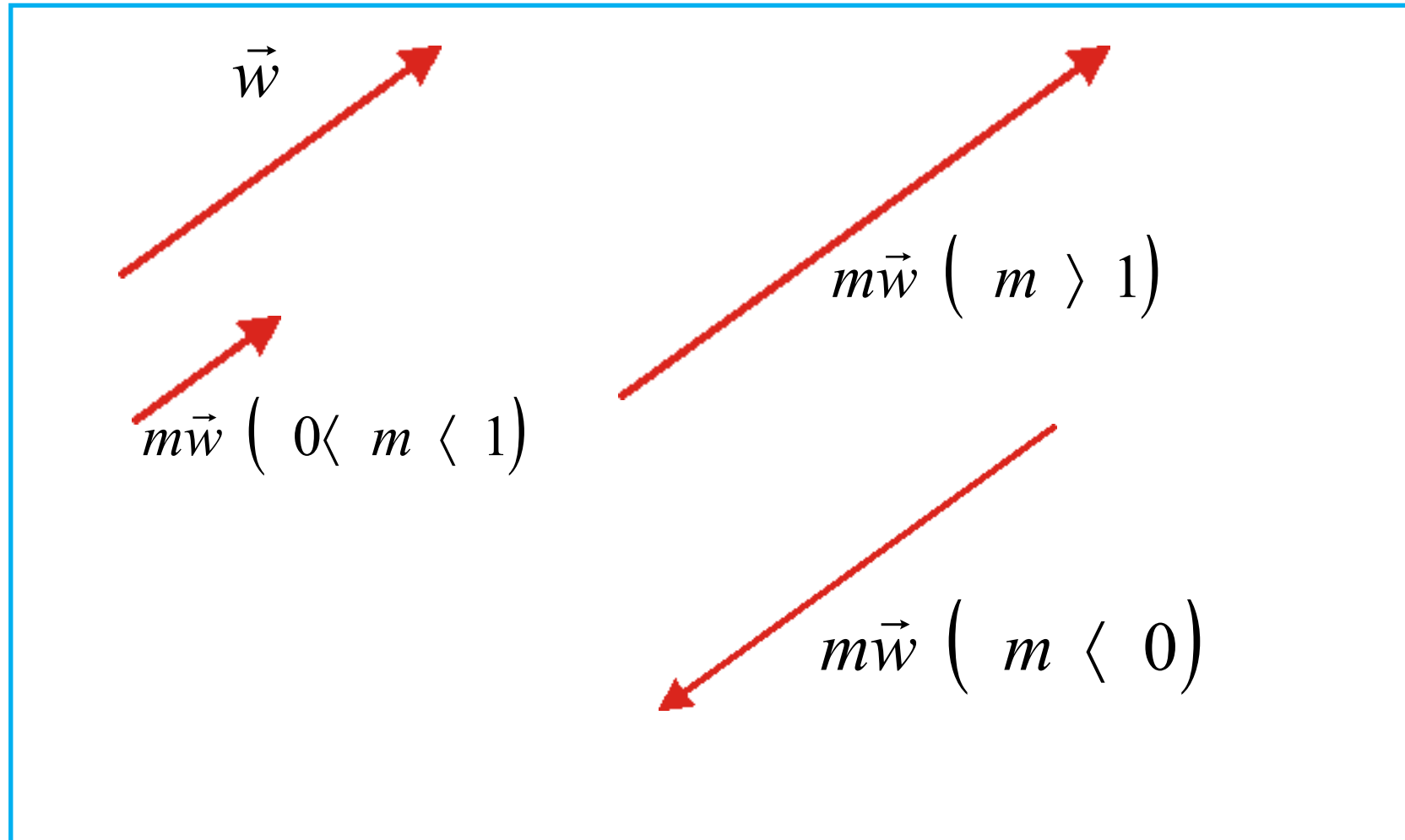
Skalar

Skalarami nazywamy wielkości, dla oznaczenia których potrzebne jest podanie *jednej liczby*, opisującej jej miarę. Przykłady: *objętość, masa, temperatura, gęstość, praca, potencjał* itp.

Wektor i jego rodzaje

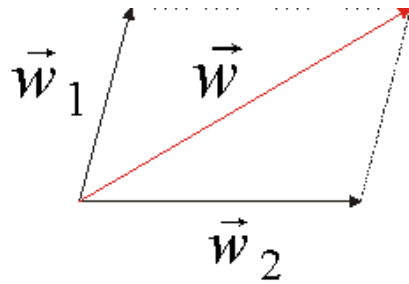


Mnożenie wektora przez liczbę



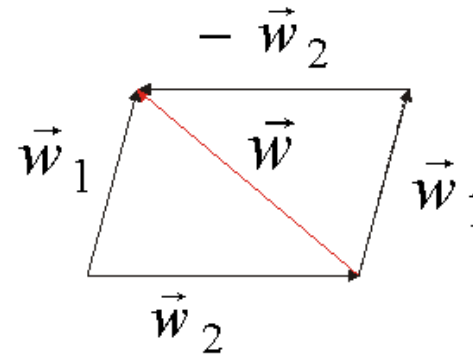
Dodawanie wektorów

dodawanie dwóch wektorów:



$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2$$

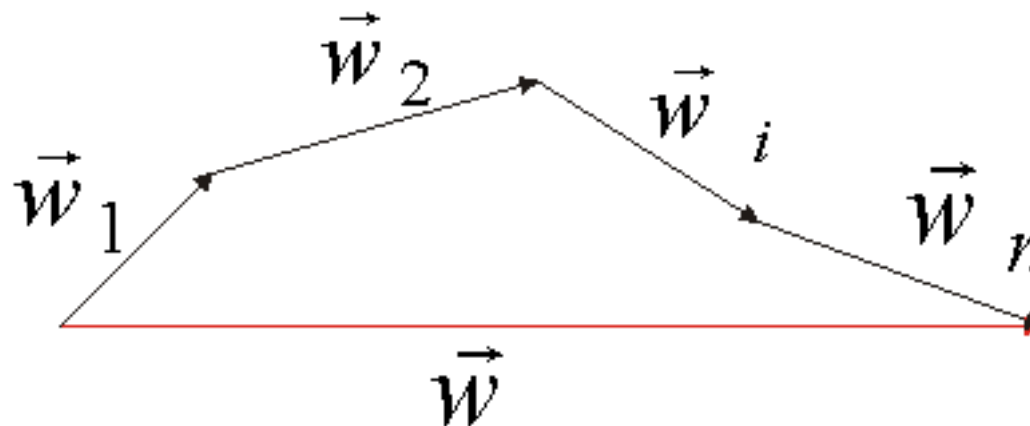
odejmowanie wektorów:



$$\vec{w} = \vec{w}_1 - \vec{w}_2 = \vec{w}_1 + (-\vec{w}_2)$$

Dodawanie wektorów

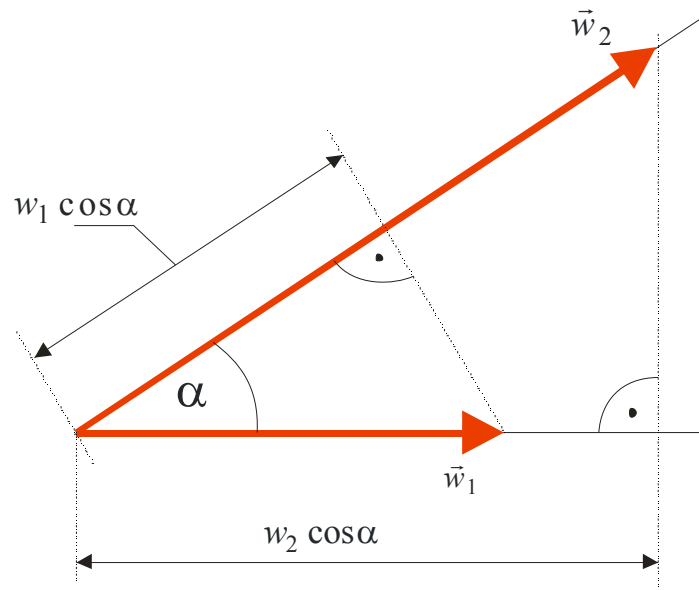
dodawanie n wektorów:



$$\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \dots + \vec{w}_i + \dots + \vec{w}_n = \sum_{i=1}^n \vec{w}_i$$

Iloczyn skalarny wektorów

Iloczyn skalarny dwóch wektorów: \vec{w}_1 i \vec{w}_2



$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = w_1 w_2 \cos \alpha$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = w_{1x} w_{2x} + w_{1y} w_{2y} + w_{1z} w_{2z}$$

Iloczyn skalarny wektorów

iloczyn skalarny jest przemienny:

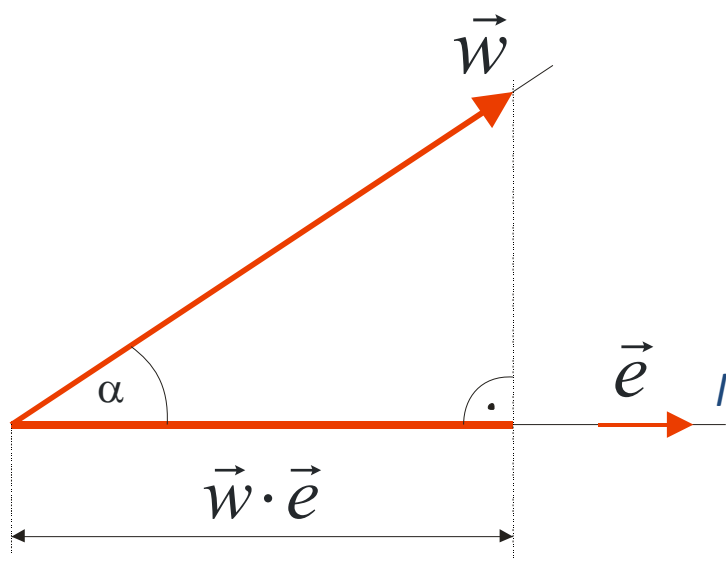
$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = \vec{w}_2 \cdot \vec{w}_1$$

iloczyn wektorów prostopadłych:

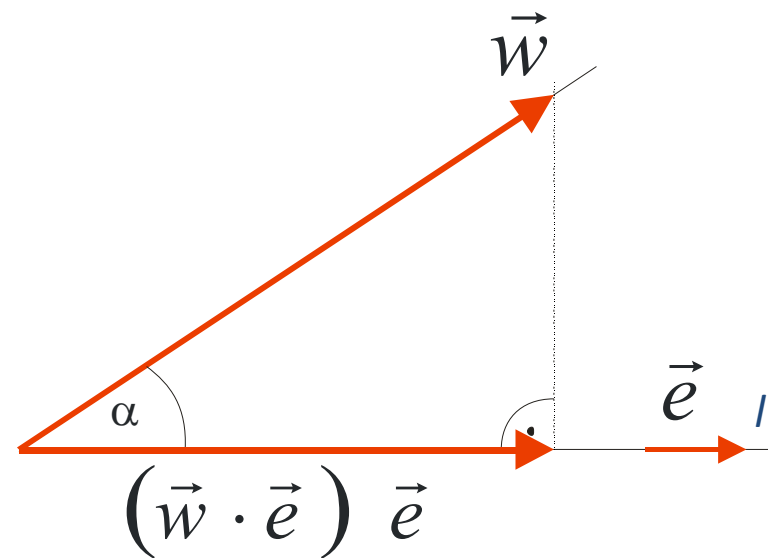
$$\vec{w}_1 \perp \vec{w}_2 \Rightarrow \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0$$

iloczyn wektorów jednakowych:

$$\vec{w} \cdot \vec{w} = \vec{w}^2 = w^2$$



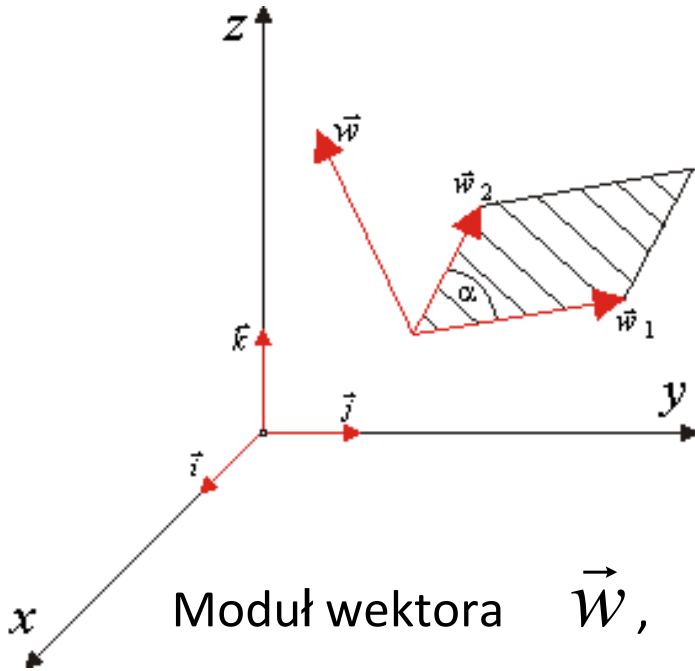
Składowa wektora wzdłuż osi l



Wektor składowy wzdłuż osi l

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów

$$\vec{w} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$$

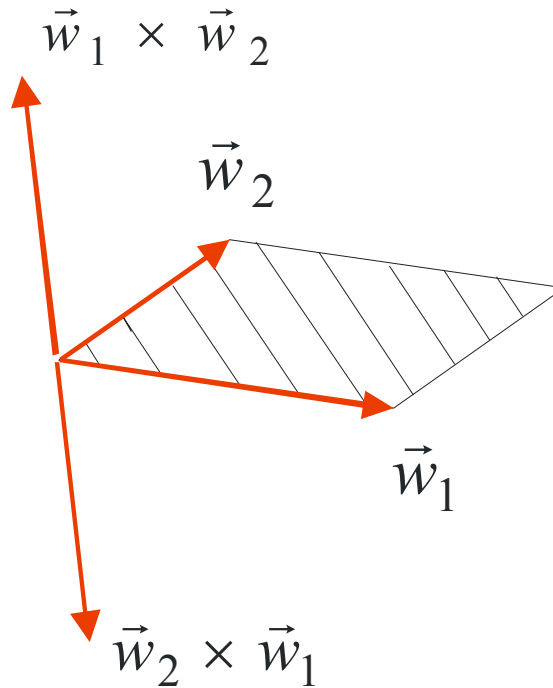


$$\vec{w} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ w_{1x} & w_{1y} & w_{1z} \\ w_{2x} & w_{2y} & w_{2z} \end{vmatrix}$$

Moduł wektora \vec{w} , $w = w_1 w_2 \sin \alpha$

Wektor \vec{w} jest prostopadły do wektorów \vec{w}_1 i \vec{w}_2

Iloczyn wektorowy nie jest przemienny. $\vec{w}_1 \times \vec{w}_2 = -\vec{w}_2 \times \vec{w}_1$

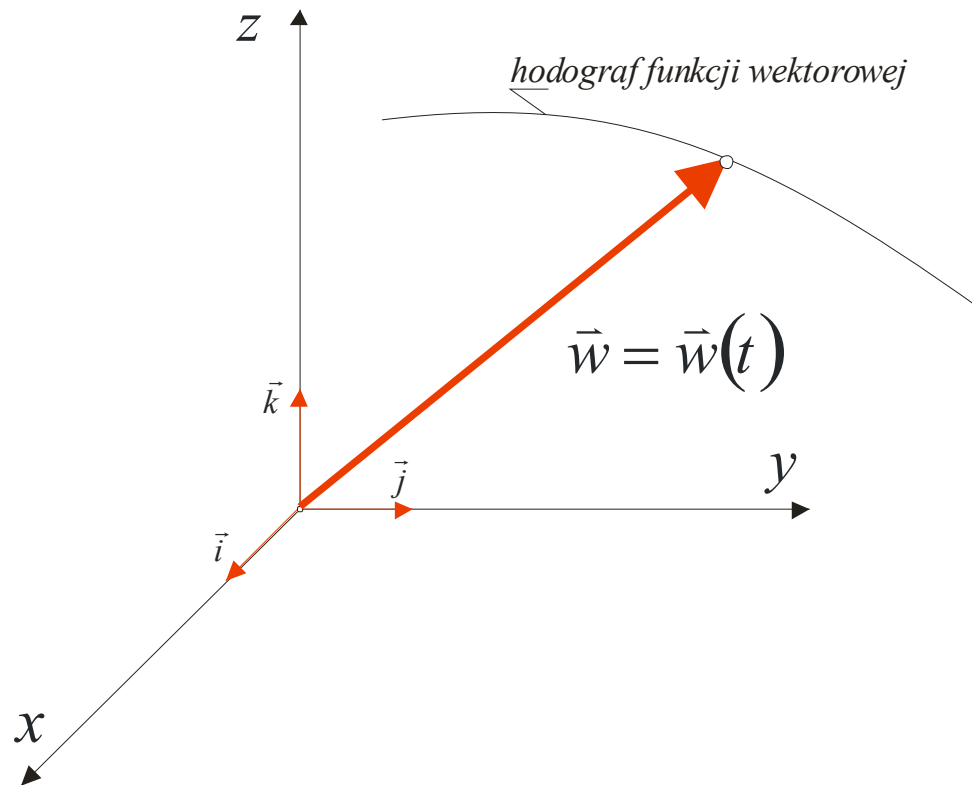


Iloczyn wektorowy dwóch jednakowych wektorów.

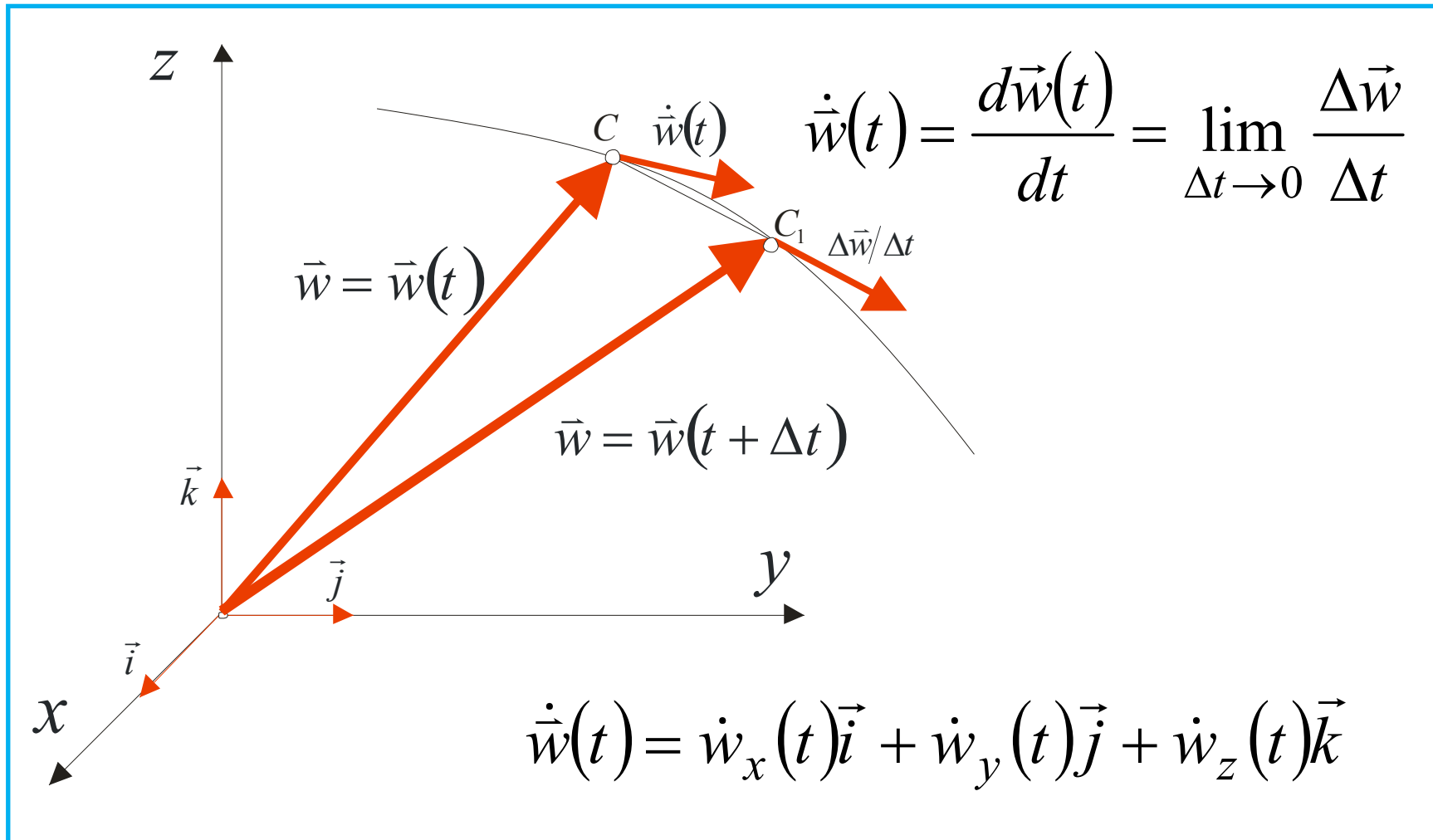
$$\vec{w} \times \vec{w} = 0$$

Funkcje wektorowe

Wektory mogą być stałe i zależne od czasu. Wektory zależne od czasu tworzą funkcję wektorową czasu: $\vec{w} = \vec{w}(t)$



Pochodna wektora



Kierunek pochodnej wektora o stałej długości

$$[\vec{w}(t)]^2 = \vec{w}^2(t) = w^2(t) = \text{const} .$$

$$\Rightarrow \frac{d \vec{w}^2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 2 \vec{w} \cdot \frac{d \vec{w}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{w} \cdot \dot{\vec{w}} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{w} \perp \dot{\vec{w}}$$

II. PODSTAWOWE PRAWA MECHANIKI. OGÓLNE ZASADY STATYKI.

PODSTAWOWE PRAWA MECHANIKI.

Pierwsze prawo Newtona

Jeżeli na ciało nie działają żadne siły lub siły działające równoważą się, to ruch tego ciała przebiega niezmiennie, tzn. jest on spoczynkiem lub co najwyżej ruchem jednostajnym prostoliniowym.

Drugie prawo Newtona

Siła działająca na ciało wywołuje zmianę prędkości, czyli nadaje ciało przyśpieszenie. Przyśpieszenie to jest wprost proporcjonalne do przyłożonej siły.

Trzecie prawo Newtona

Jeżeli ciało A wywiera na ciało B pewną siłę, to wzajemnie, ciało B wywiera na ciało A siłę równą co do wielkości i kierunku, lecz przeciwnie skierowaną.

Prawo czwarte

Jeżeli na punkt materialny o masie m lub układ punktów materialnych działa jednocześnie kilka sił, to każda z nich działa niezależnie od pozostałych, a wszystkie razem działają tak, jak jedna tylko siła równa wektorowej sumie wektorów danych sił.

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m \vec{u}_i \right) = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \vec{P}$$

Prawo piąte (grawitacji)

Każde dwa punkty materialne przyciągają się wzajemnie z siłą wprost proporcjonalną do iloczynu ich mas, i odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości między nimi. Kierunek siły leży na prostej łączącej te punkty.

$$P = k \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

III. STATYKA

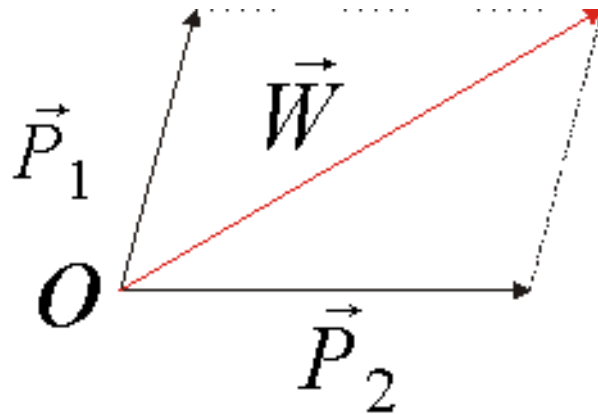
Statyka jest działem mechaniki i bada warunki równowagi sił (czynnych i biernych) znajdujących się w stanie równowagi, działających na punkt materialny lub zbiór punktów materialnych względem układu odniesienia.

Metody rozwiązywania zadań stosowane w statyce:

- *metoda wykreślna,*
- *metoda analityczna,*
- *metoda wykreślno-analityczna.*

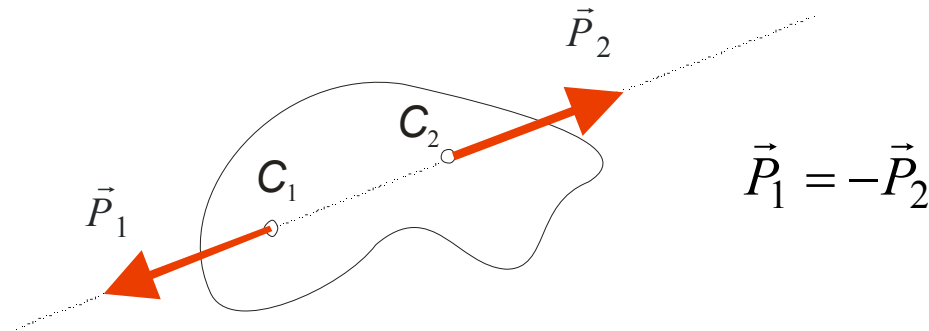
Aksjomaty statyki:

1. Zasada równoległoboku - dowolne dwie siły \vec{P}_1 i \vec{P}_2 przyłożone do jednego punktu O można zastąpić jedną siłą \vec{W} , przyłożoną do tegoż punktu i będącą wektorem, którego miarą jest przekątna równoległoboku zbudowanego na wektorach sił składowych.

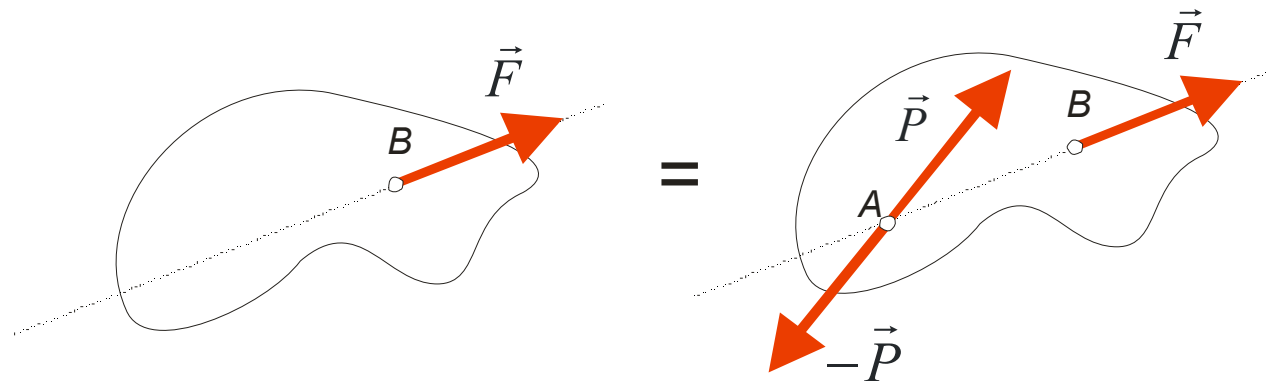


$$\vec{W} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$

2. Zasada równowagi dwóch sił - *dwie siły działające na ciało sztywne są w równowadze, gdy działają wzdłuż jednej prostej, są równe i przeciwnie skierowane.*

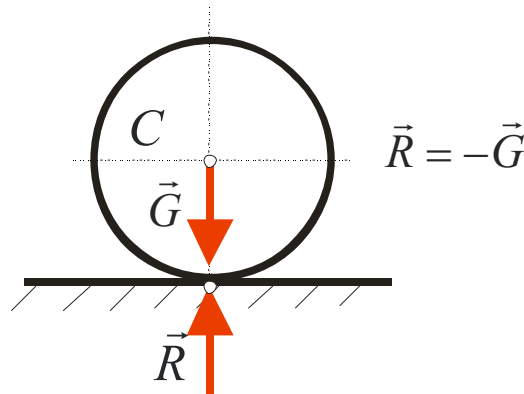


3. Zasada równoważności - *działanie dowolnego układu sił przyłożonych do ciała sztywnego nie ulegnie zmianie, jeśli dodamy do niego inny dowolny układ sił, ale równoważny zeru (układ sił równoważących się).*

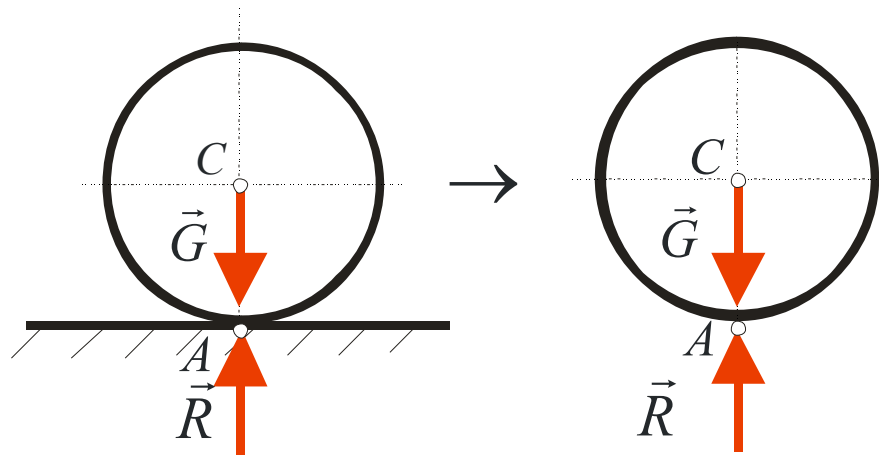


4. Zasada zeszywnienia - *równowaga sił działających na ciało odkształcalne nie zostanie naruszona przez zmianę go na ciało sztywne. Zasada ta może być stosowana w ograniczonym zakresie i pod pewnymi warunkami.*

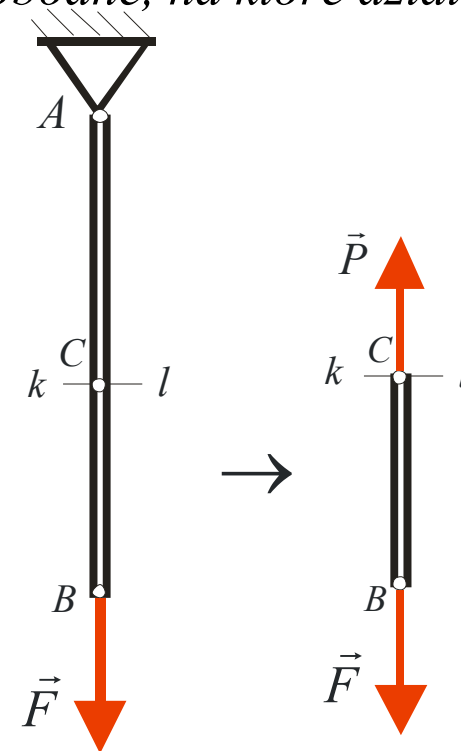
5. Zasada działania i przeciwdziałania - *każdemu działaniu towarzyszy równe co do miary, leżące na tej samej prostej i przeciwnie skierowane przeciwdziałanie.*



6. **Zasada oswobodzenia z więzów** - każde ciało nieswobodne można umownie oswobodzić z więzów, zastępując ich działanie siłami, zwanymi siłami reakcji i rozpatrywać je jako ciało swobodne, na które działają siły czynne i siły reakcji więzów.



układ równoważny

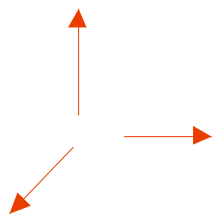
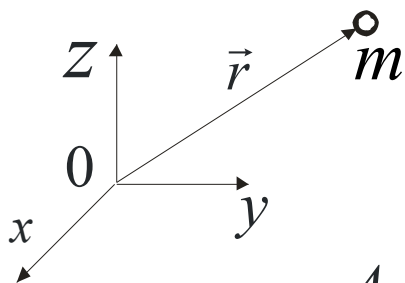


metoda przecięć

STOPNIE SWOBODY, WIĘZY I UWALNIANIE OD WIĘZÓW.

Stopnie swobody określają liczbę współrzędnych koniecznych i wystarczających do wyznaczenia położenia punktu materialnego lub układu punktów materialnych w przestrzeni.

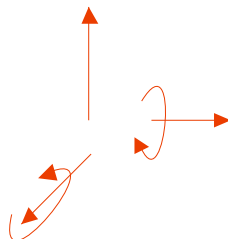
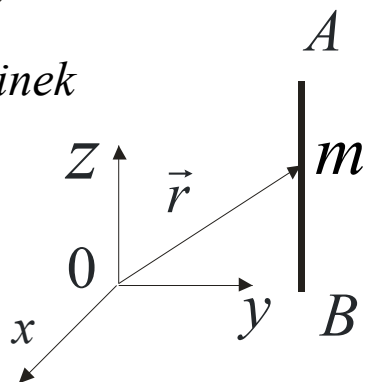
Punkt materialny



Stopnie swobody :

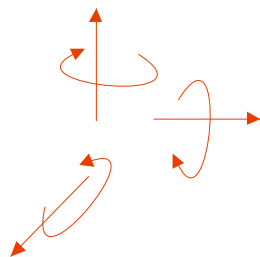
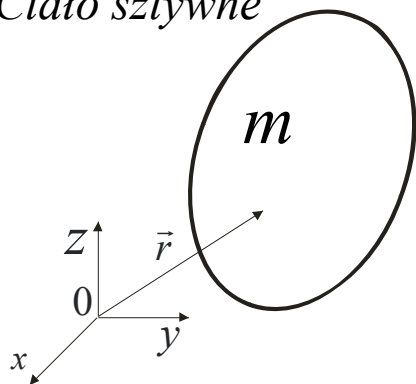
*trzy liczby określą położenie punktu materialnego
- trzy stopnie swobody*

Odcinek



*pięć liczb określa położenie odcinka AB
- pięć stopni swobody*

Ciało sztywne



*sześć liczb określa położenie ciała sztywnego
- sześć stopni swobody*

translacja



, rotacja



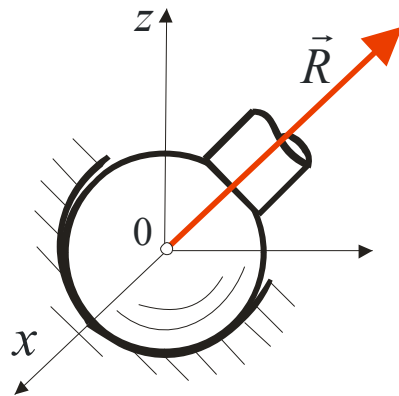
Sily działające na ciało sztywne dzielimy na:

- sily czynne,
- sily reakcji (sily bierne).

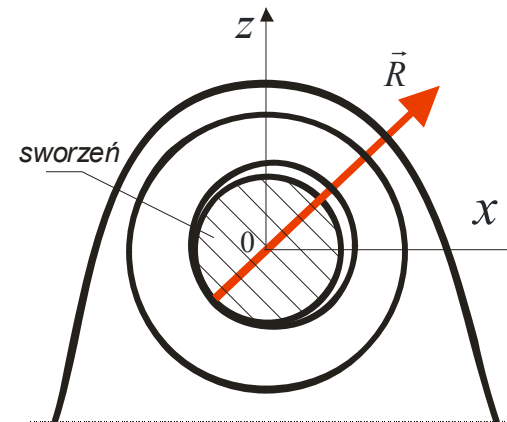
Więzy tworzą warunki ograniczające ruch ciała w przestrzeni, dzielimy je na: obustronne, jednostronne, wewnętrzne, zewnętrzne i idealne (bez tarcia).

Rodzaje niektórych podpór stosowanych w praktyce:

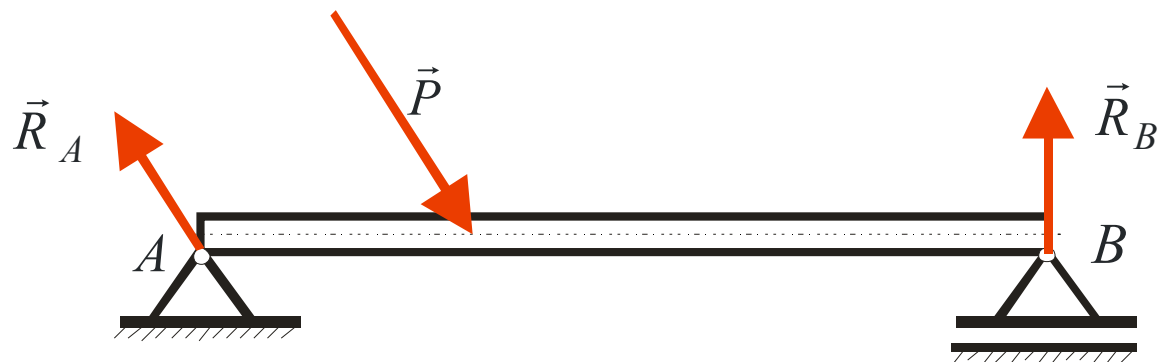
Przegub kulowy



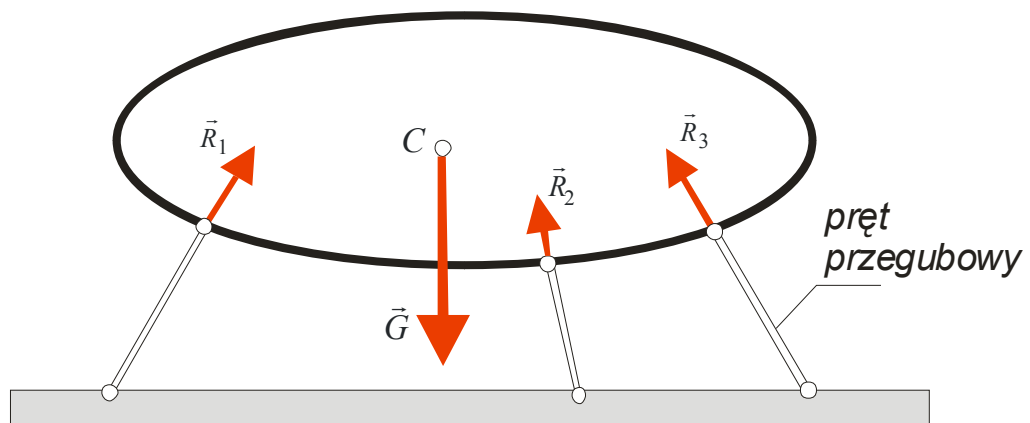
Przegub walcowy



Podpora przegubowa i przegubowo- przesuwna



Pręt sztywny przegubowy

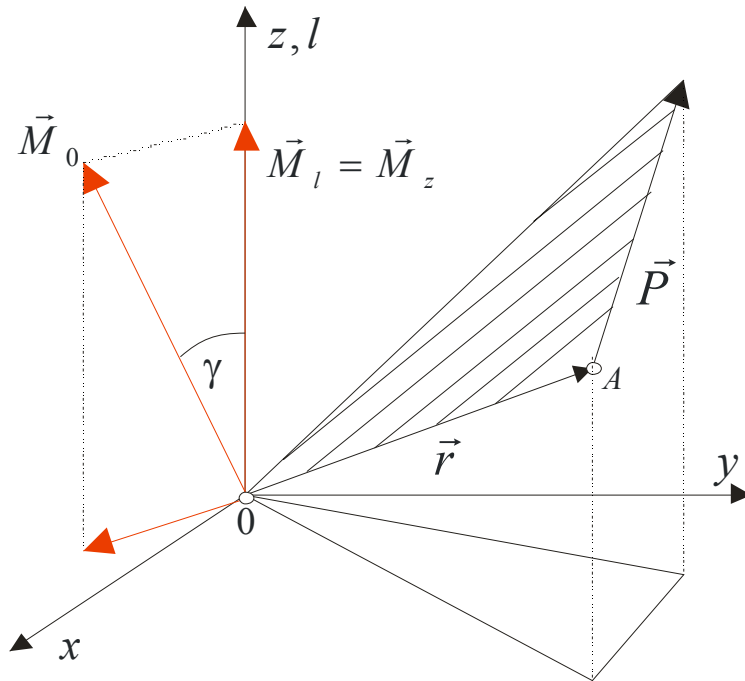


IV. RÓWNOWAGA STATYCZNA PUNKTU I UKŁADU PUNKÓW MATERIALNYCH.

Moment siły

Wektor położenia i siła

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = (x, y, z); \quad \vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k} = (P_x, P_y, P_z)$$



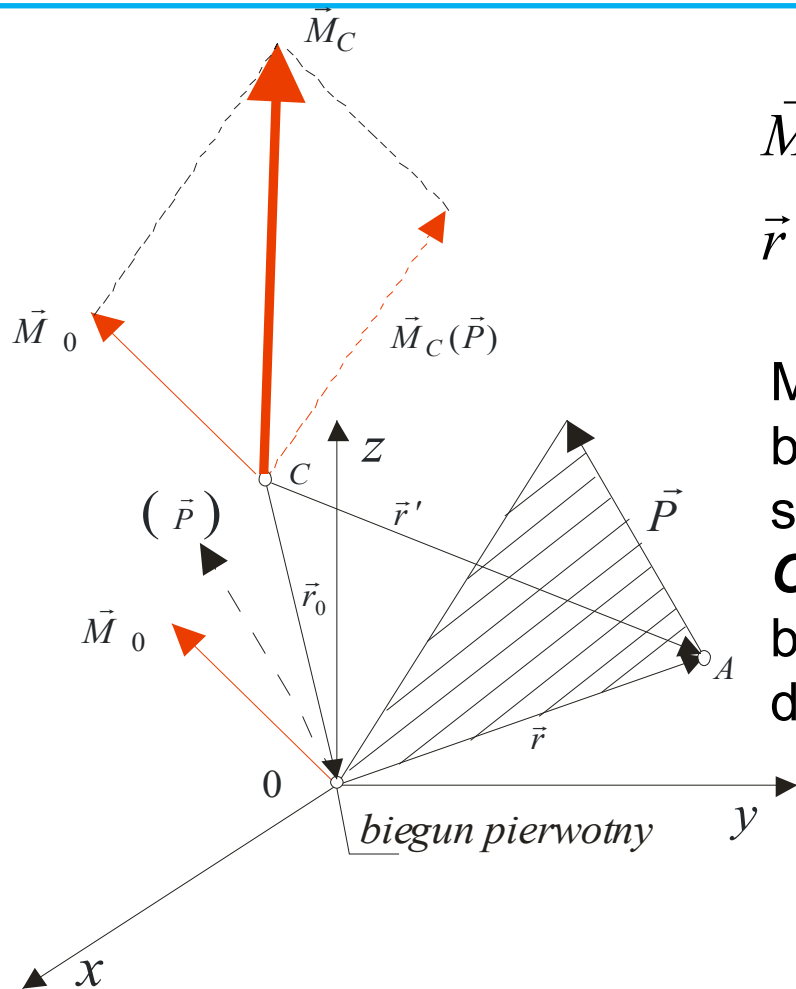
Moment siły względem punktu O

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{r} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}$$

Moment siły względem osi l

$$\vec{M}_l = M_0 \cos \gamma \vec{k}$$

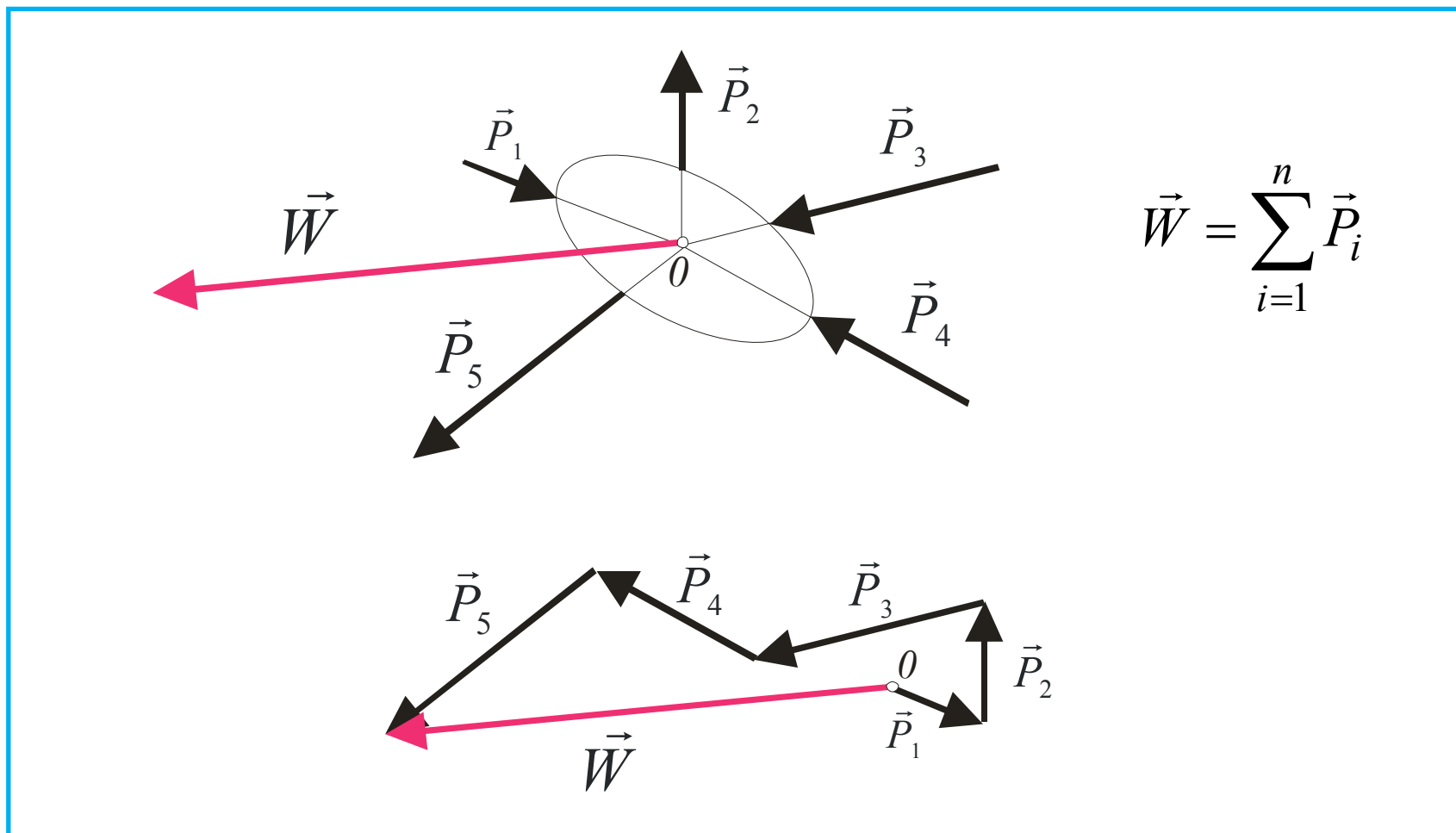
Przekształcenia momentu siły



$$\vec{M}_C = \vec{r}' \times \vec{P} = (\vec{r} + \vec{r}_0) \times \vec{P} = \vec{r} \times \vec{P} + \vec{r}_0 \times \vec{P} = \vec{M}_0 + \vec{M}_C(\vec{P})$$

Moment siły względem nowego bieguna C jest równy momentowi siły względem bieguna pierwotnego O plus moment względem nowego bieguna C siły (P), przeniesionej do punktu O .

Zbieżny układ sił



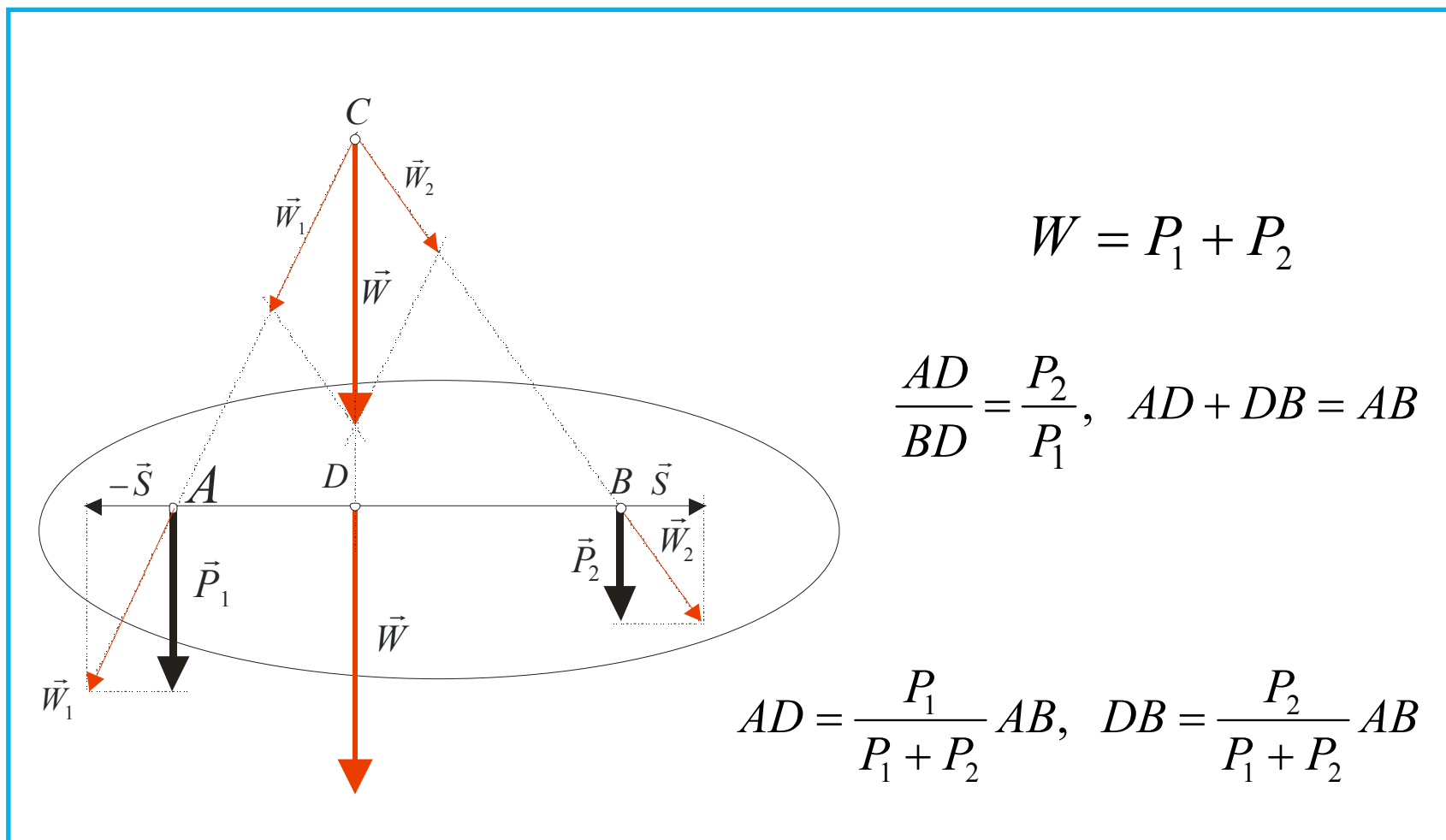
Zbieżny układ sił w równowadze

$$\vec{W} = 0$$

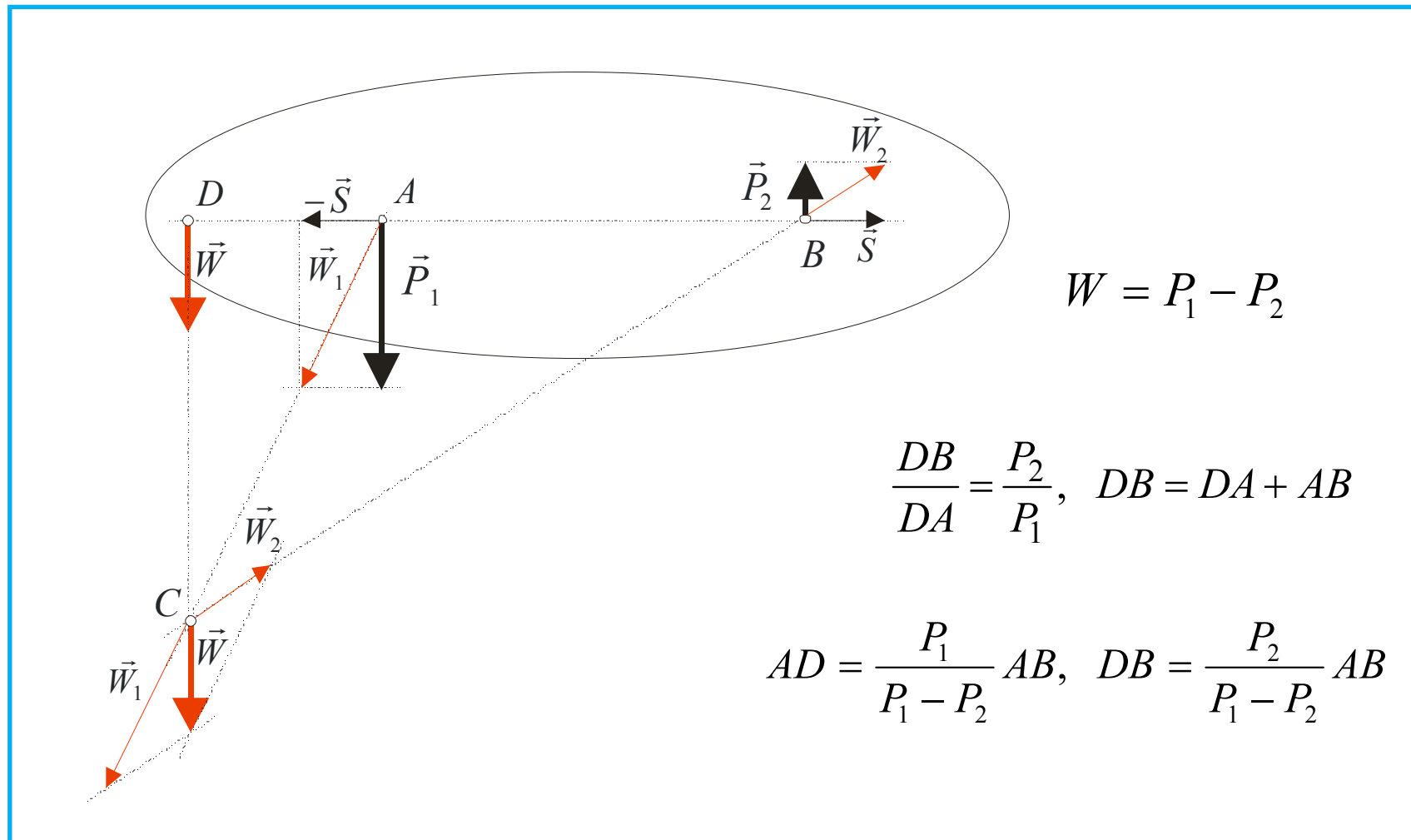


$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0$$

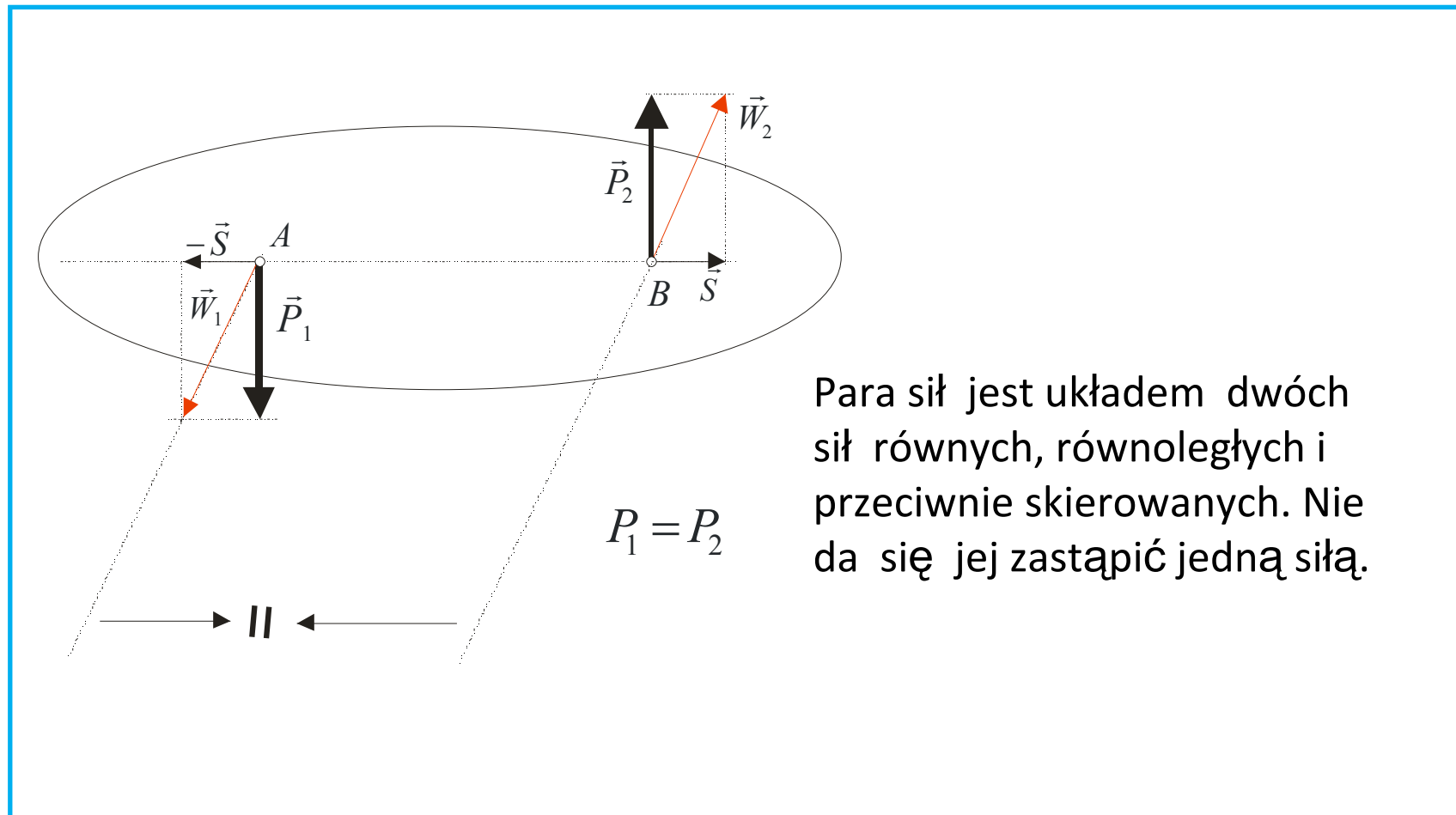
Siły równoległe o zgodnych zwrotach



Siły równoległe o przeciwnych zwrotach



Para sił - nowy element w statyce



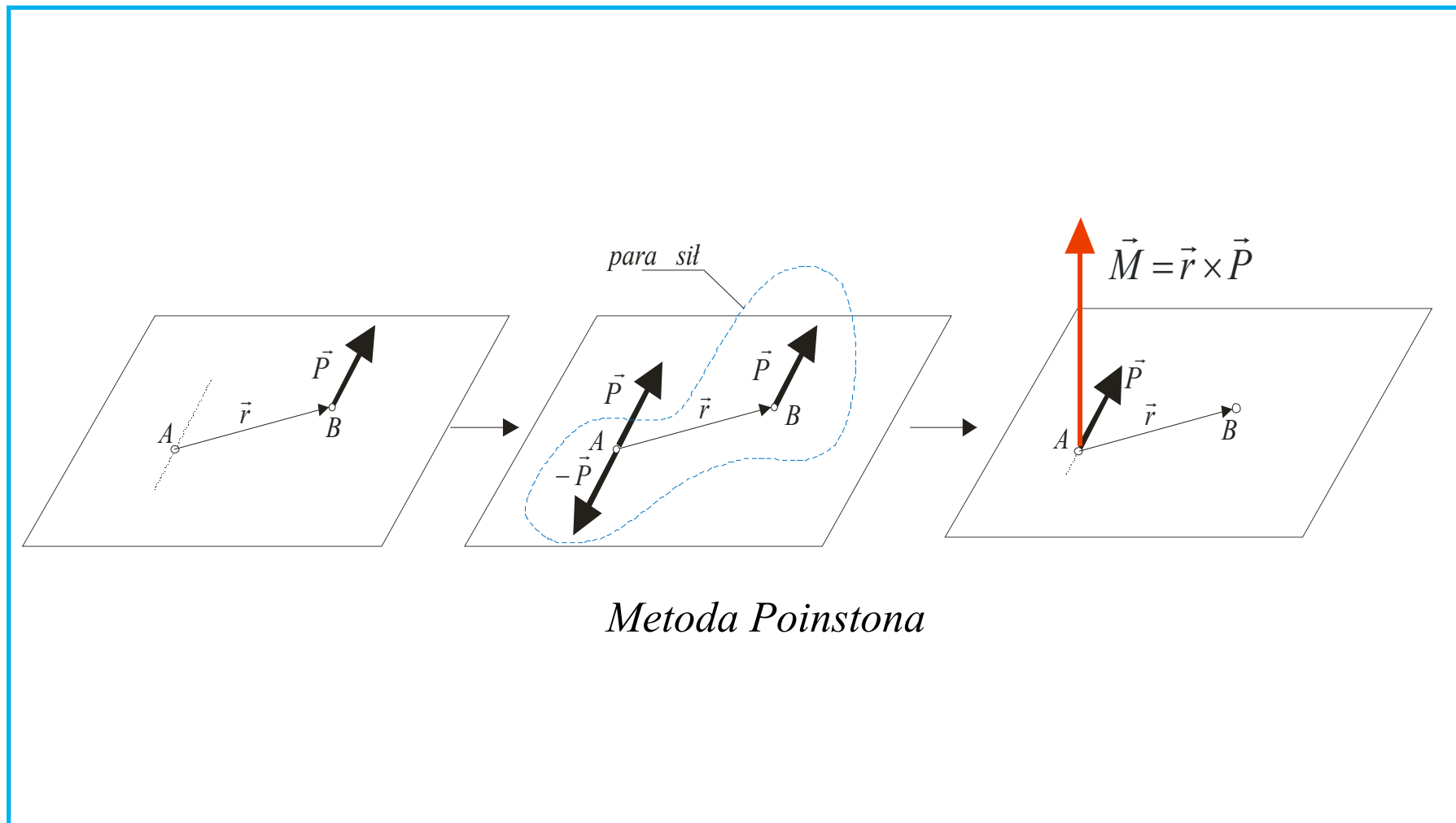
$\vec{M}_p = \vec{r} \times \vec{P} = \overrightarrow{const}$

$\vec{M}_p = \vec{r}_1 \times \vec{P} - \vec{r}_2 \times \vec{P} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{P}$
 $= \vec{r} \times \vec{P} = \overrightarrow{const}$

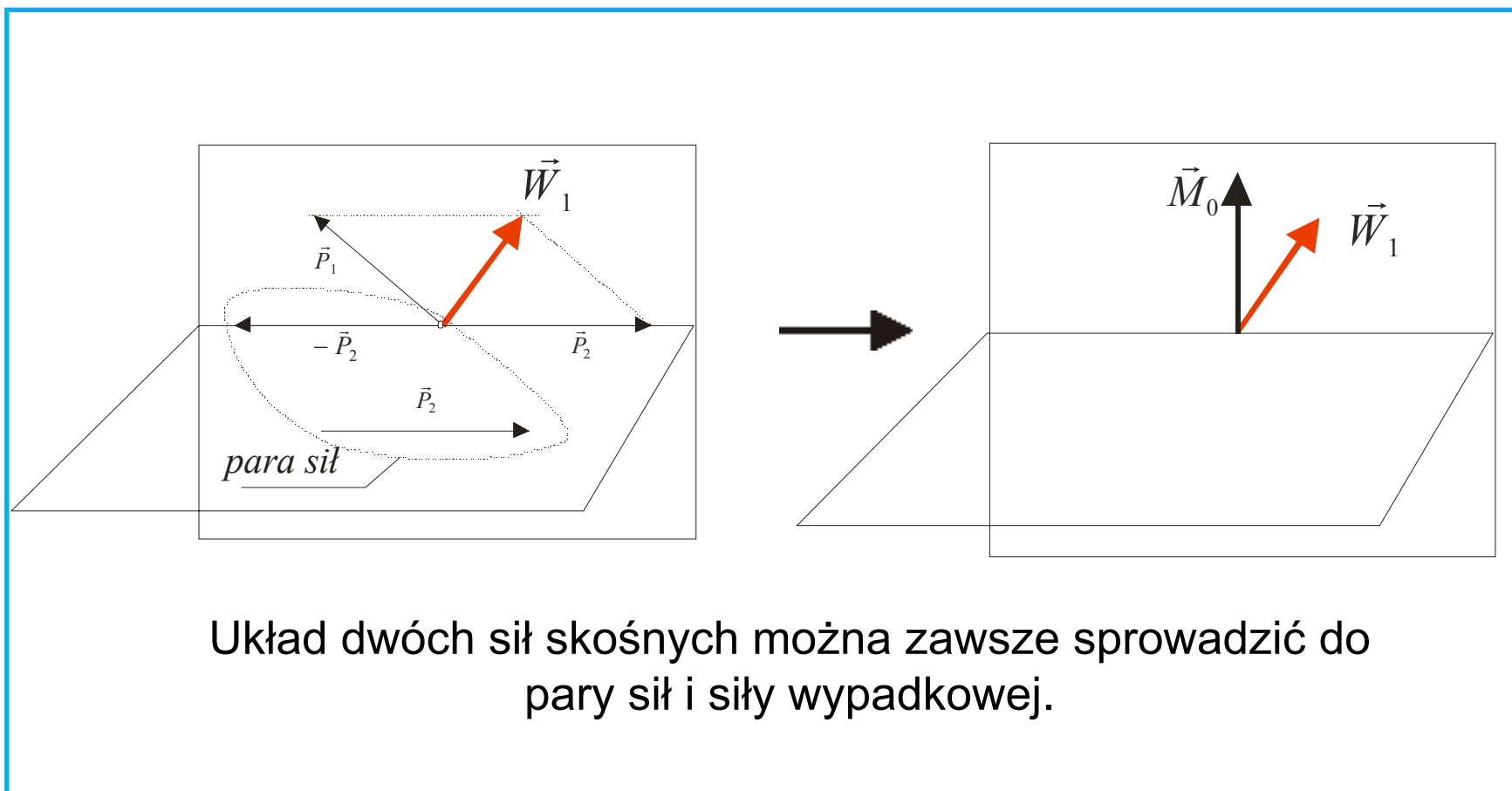
plaszczyna wyznaczona przez parę sił

Para sił tworzy swobodny wektor momentu.

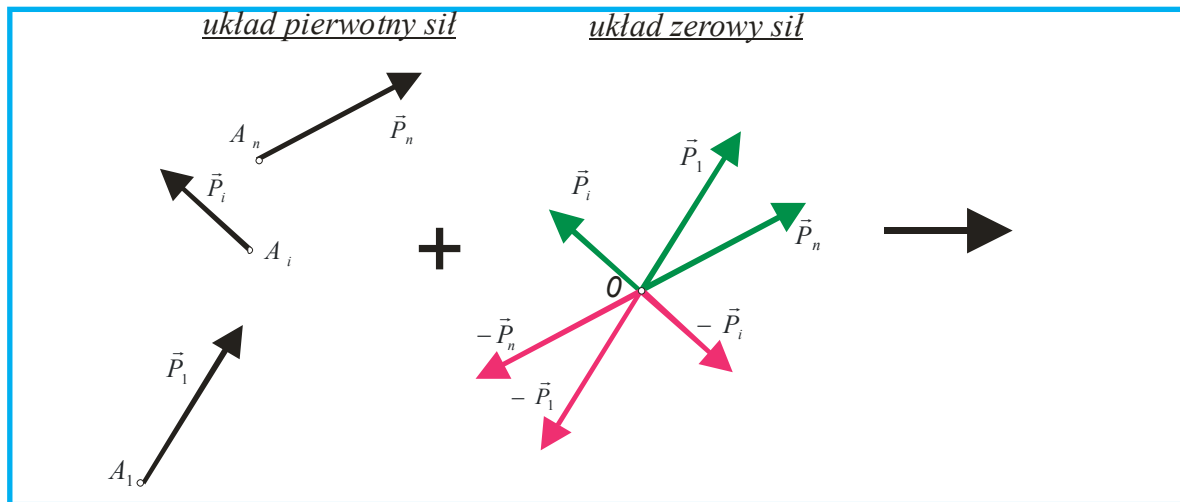
Równoległe przesunięcie siły



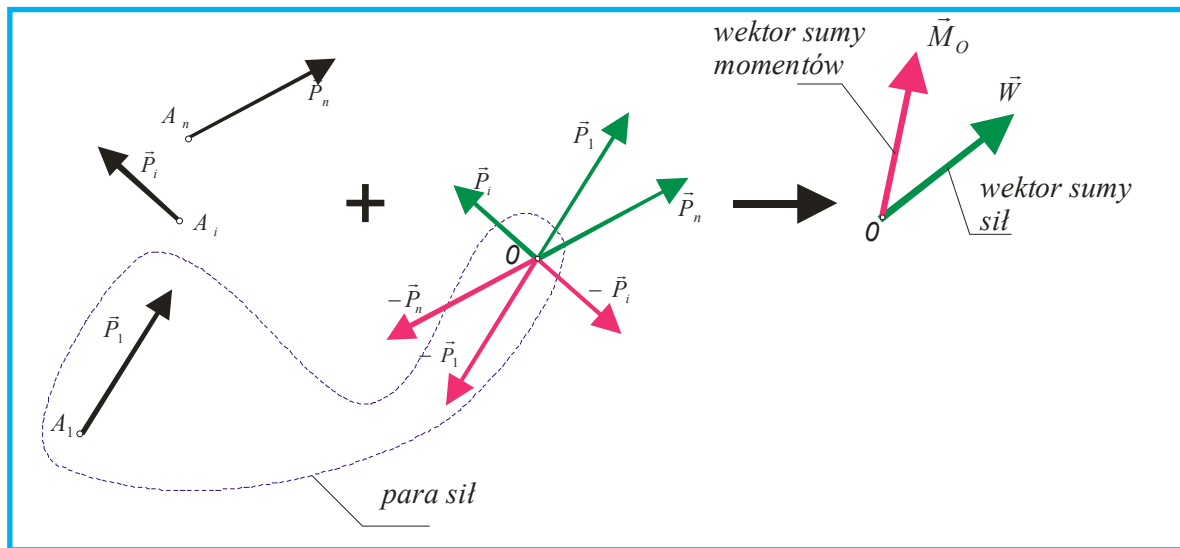
Siły skośne - sprowadzenie do pary sił i jednej siły



Redukcja dowolnego układu sił do siły i pary sił



Dodanie wektorów zerowych



Dodanie wektorów i par sił

Równowaga dowolnego płaskiego układu sił

Układ płaski sił (siły leżą w jednej płaszczyźnie) jest w równowadze gdy wektor główny układu \vec{R} i moment główny \vec{M}_0 względem środka redukcji O są równe zero.

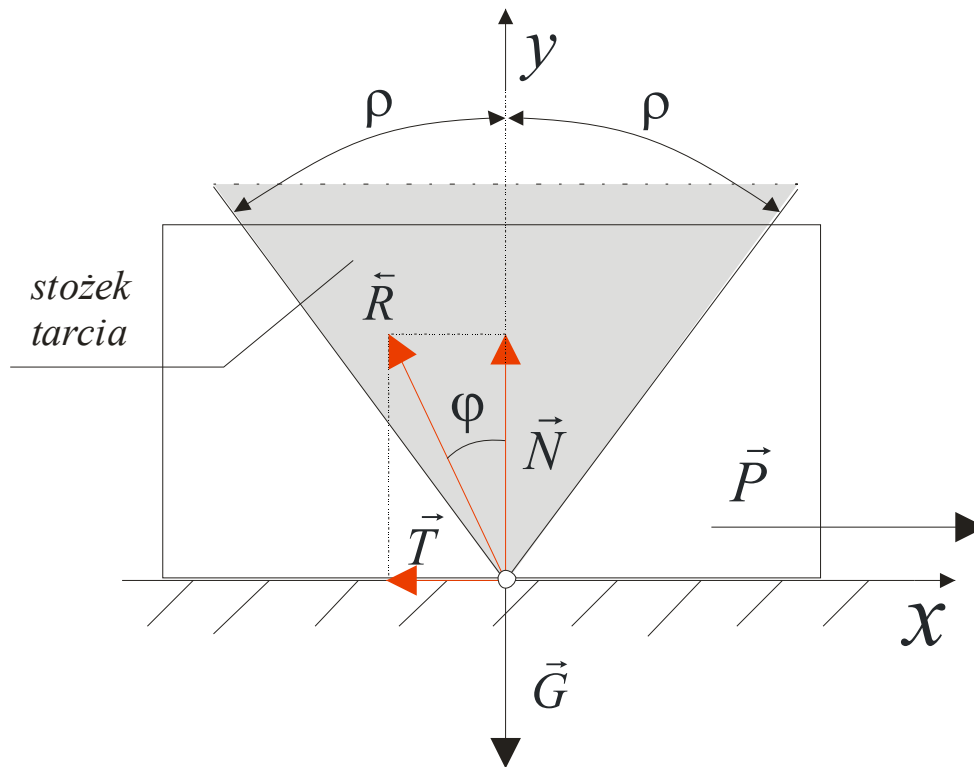
$$\vec{R} = \vec{W} = 0, \quad \vec{M}_0 = 0.$$



$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^n M_{i0} = 0.$$

V. TARCIE.

Tarcie jest zjawiskiem polegającym na powstawaniu sił reakcji na powierzchni kontaktu dwóch ciał. Siły tarcia przeciwstawiają się potencjalnemu ruchowi. Przyczyną tarcia, przede wszystkim, jest chropowatość powierzchni.



T - siła tarcia

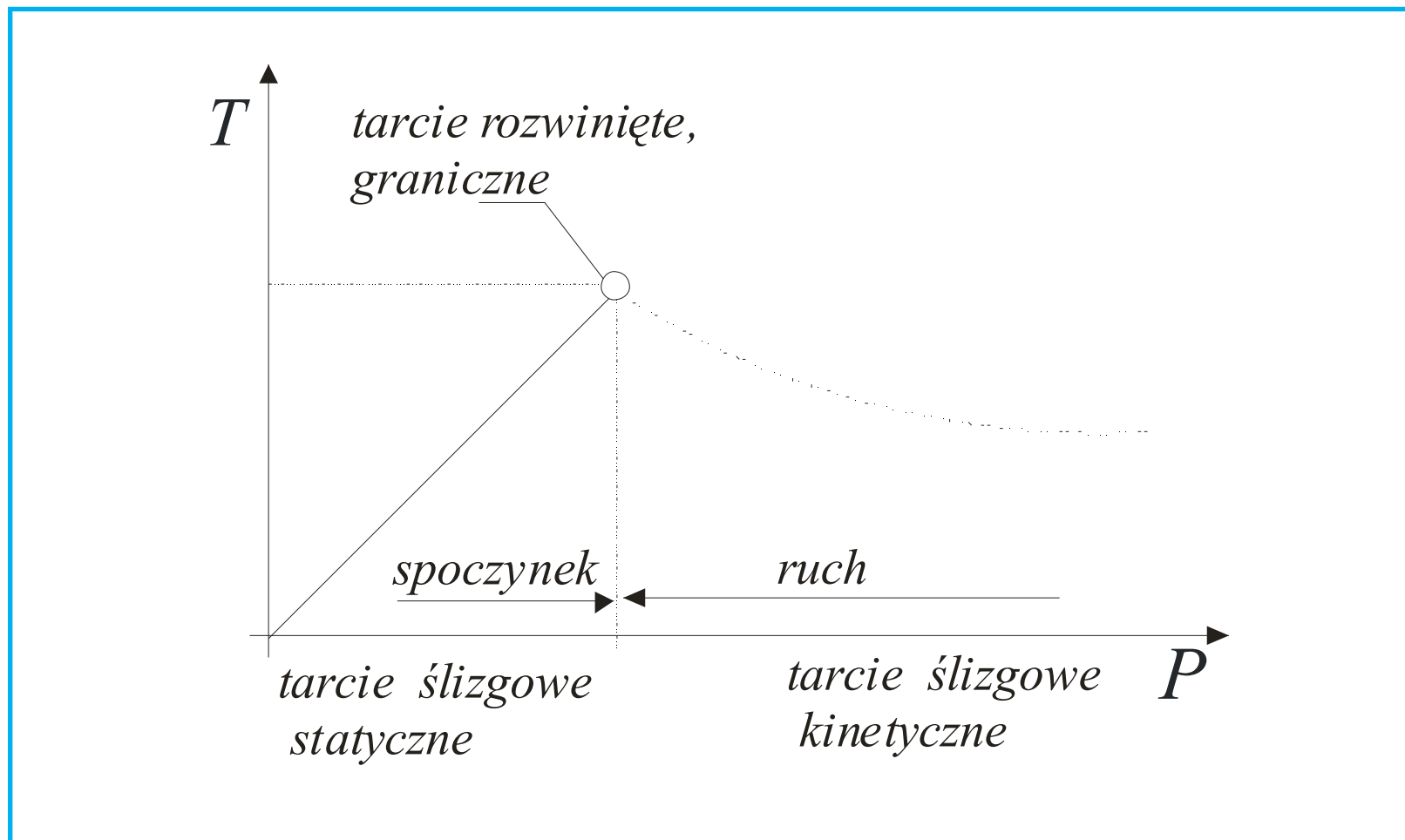
ρ - maksymalny kąt tarcia

T_g - tarcie rozwinięte

$$T \leq T_g = \mu N \quad T_g = N \operatorname{tg} \rho$$

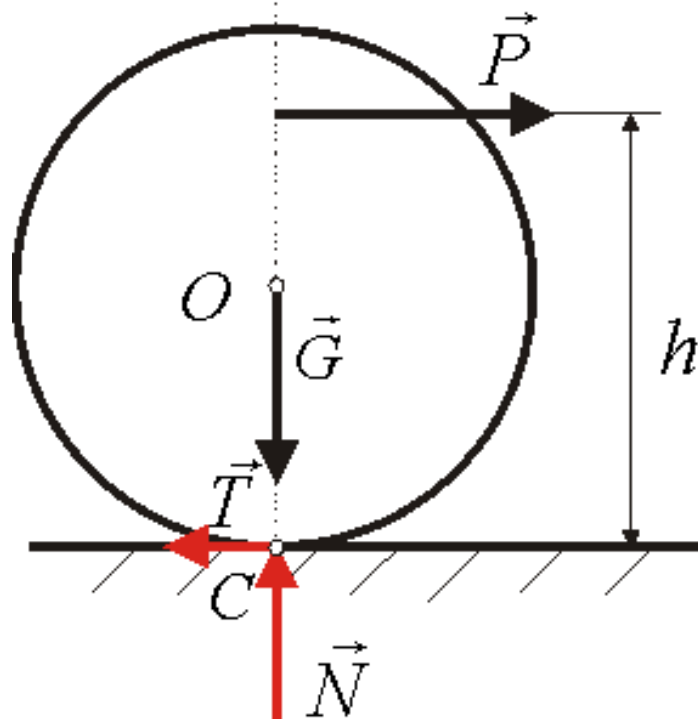
Warunek spoczynku: $\varphi \leq \rho$

Zależność między siłą tarcia i siłą czynną



TARCIE TOCZNE.

Brak odkształcenia
podłoża i walca



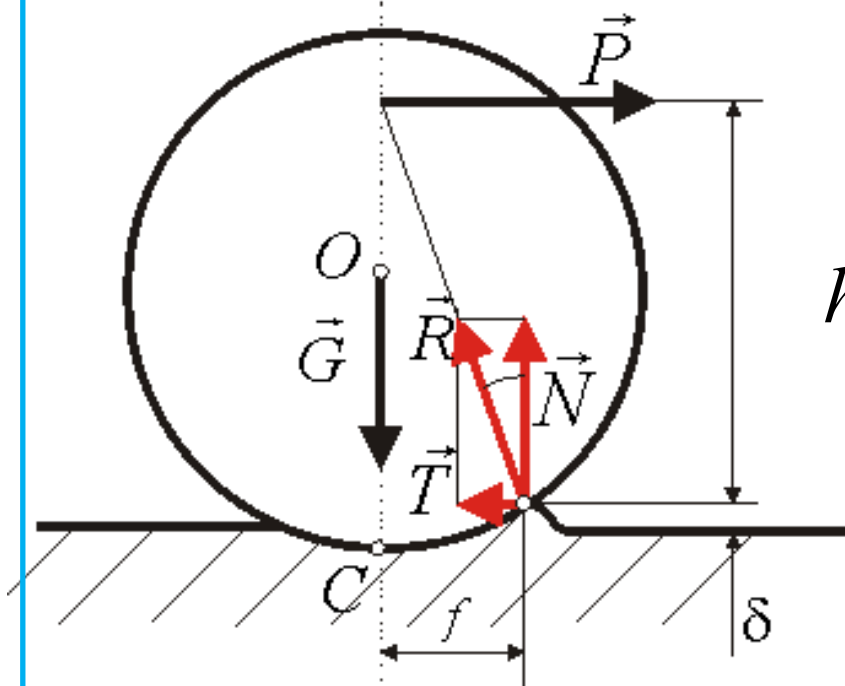
$$N = G \text{ i } P = T$$

Warunek braku poślizgu

$$T = P \leq \mu N = \mu G$$

Toczenie walca wywoła minimalna siła P .

Odkształcalne podłoże



Równania równowagi:

$$N = G \text{ i } P = T, P h \leq N f$$

h

$$P = T = N \frac{f}{h} \langle \mu N = \mu G$$

Warunek toczenia walca bez poślizgu:

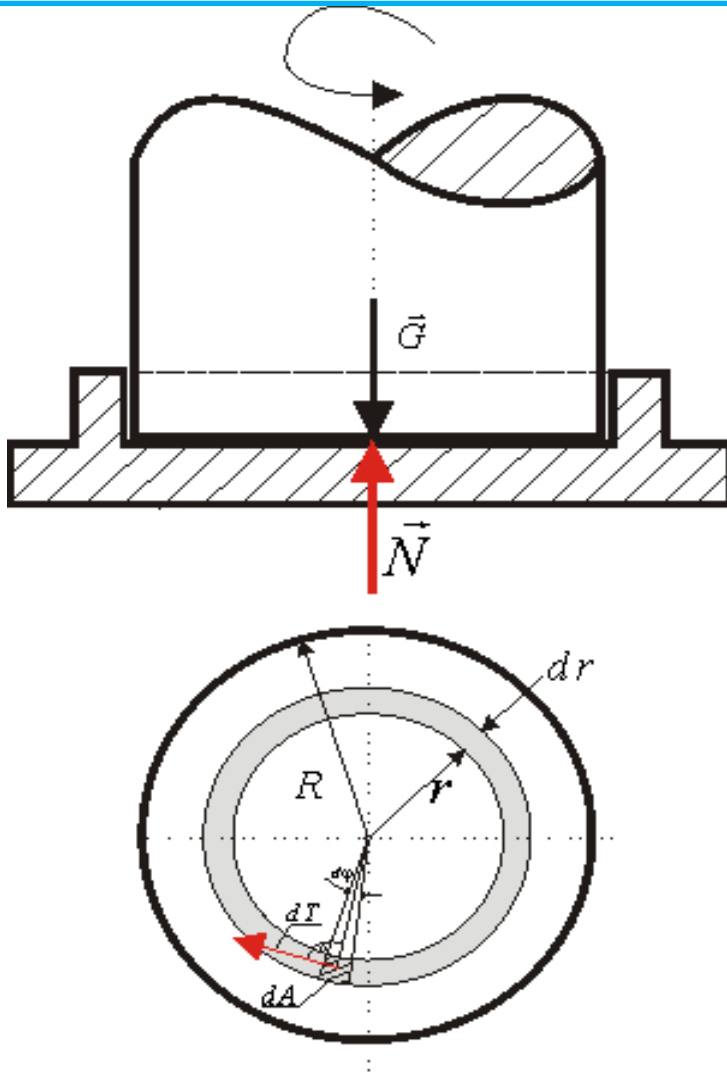
$$\frac{f}{h} \langle \mu$$

Tarcie toczne jest bardziej korzystne, niż posuwiste.

$$\frac{f}{h} \ll \mu$$

f - współczynnik oporu toczenia

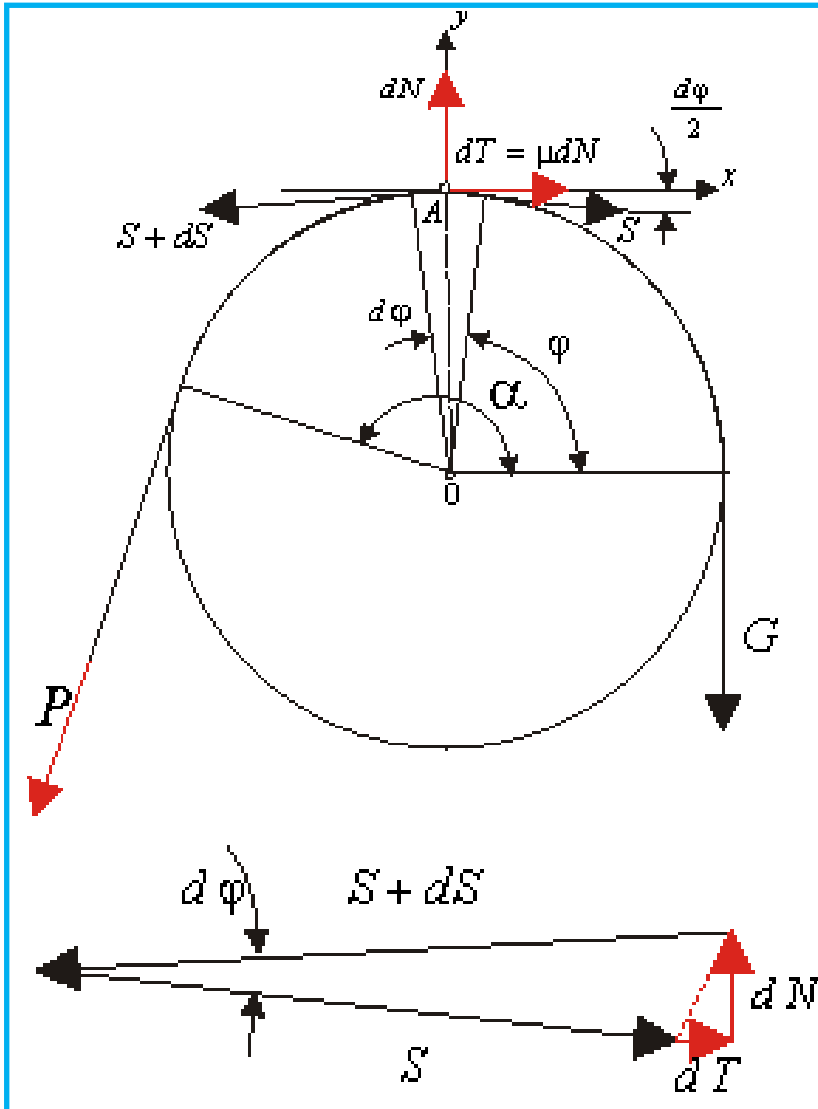
Moment tarcia w łożysku poprzecznym



Moment tarcia:

$$\begin{aligned} M_T &= \iint_A dT \cdot r = \int_0^R \int_0^{2\pi} \mu \frac{G}{\pi R^2} r d\varphi dr \cdot r \\ &= \int_0^R \mu \frac{G}{\pi R^2} 2\pi r dr \cdot r \\ &= \mu \frac{2G}{R^2} \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} \mu G \cdot R \end{aligned}$$

TARCIE CIĘGNA O KRAŻEK



równowaga w kierunku x :

$$-(S + dS) \cos \frac{d\varphi}{2} + \mu dN + S \cos \frac{d\varphi}{2} = 0,$$

$$\Rightarrow \underline{dS = \mu dN}$$

równowaga w kierunku y :

$$dN - (S + dS) \sin \frac{d\varphi}{2} - S \sin \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

$$\Rightarrow \underline{dN = S d\varphi}$$

porównując równania równowagi
otrzymujemy równanie różniczkowe:

$$\underline{dS = \mu \cdot S d\varphi}$$

Rozdzielając zmienne w równaniu różniczkowym mamy:

$$\frac{dS}{S} = \mu d\varphi.$$

Całkując powyższe równanie otrzymujemy wzór na siłę napięcia w linie:

$$\ln S = \mu\varphi + \ln C \quad \longrightarrow \quad S = C \cdot \exp(\mu\varphi).$$

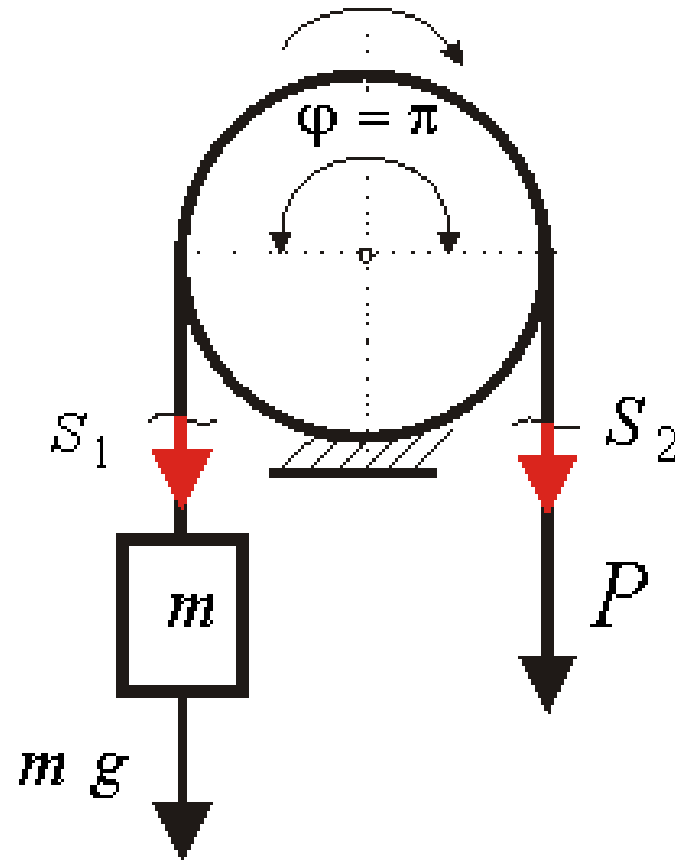
Stałą C wyznaczamy z warunku brzegowego:

$$\varphi = 0, \quad S = G \quad \longrightarrow \quad C = G.$$

Napięcie w dowolnym punkcie cięgna wynosi:

$$\underline{S = G \cdot \exp(\mu\varphi)}.$$

Przykład. Siła P potrzebna do podniesienia ciężaru o masie m



$$P = S_2 = S_1 \cdot e^{\mu\varphi}$$
$$= mg \cdot e^{\mu\pi}$$

VI. WIADOMOŚCI WSTĘPNE Z WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW.

1. Cele nauki o wytrzymałości materiałów.
2. Przedmiot badań wytrzymałości materiałów.
3. Elementy konstrukcyjne.
4. Pojęcia podstawowe.
5. Zasady wytrzymałości materiałów:
 - Zasada de Saint-Venanta,
 - Zasada superpozycji.
6. Rodzaje naprężeń:
 - Rozciąganie i ściskanie,
 - Ścinanie,
 - Skrećanie,
 - Zginanie,
 - Stany naprężeń.
7. Podstawy projektowania.

Ad-1. Cele nauki o wytrzymałości materiałów

Badanie zachowania się materiałów i konstrukcji z nich wykonanych pod wpływem działających na nie różnych obciążeń zewnętrznych. Uwzględnienie ich zdolności do odkształceń. Poznanie odpowiednich metod obliczeniowych.

Ad-2. Przedmiot badań wytrzymałości materiałów

Przedmiotem badań wytrzymałości materiałów są modele ciał stałych, zbliżonych własnościami do ciał rzeczywistych.

Modele ciał stosowane w wytrzymałości materiałów :

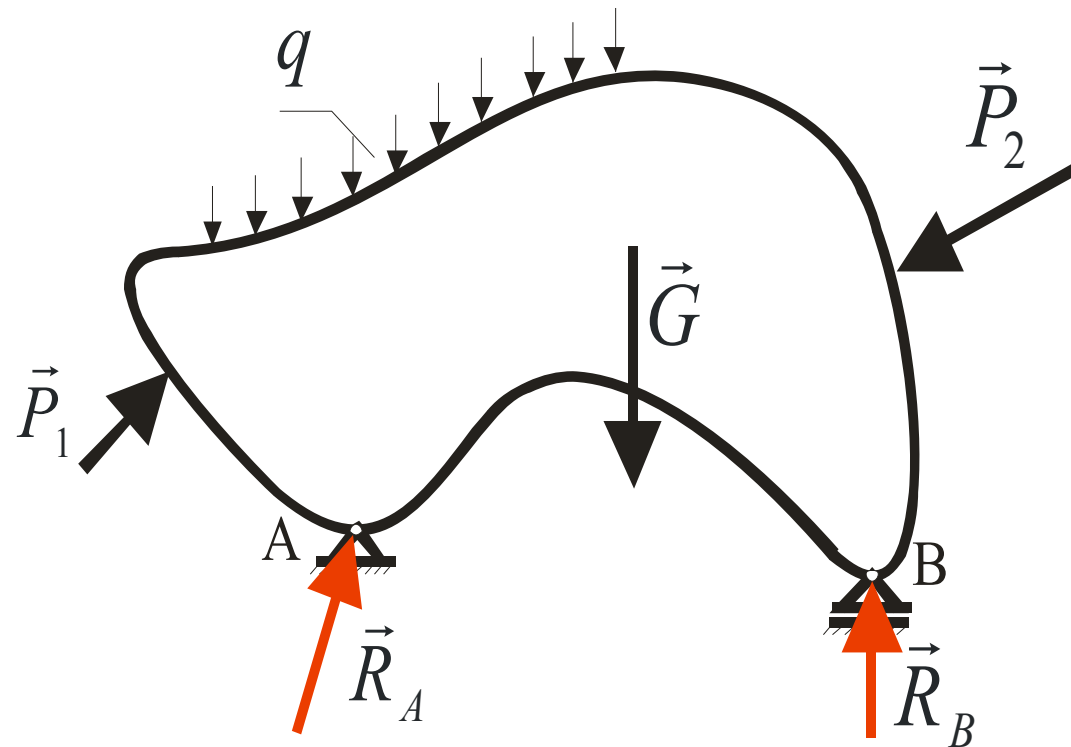
- **ciała jednorodne** - własności fizyczne i struktura niezmienna w objętości ciała,
- **ciała izotropowe** - własności fizyczne ciał nie zależą od kierunku,
- **ciała anizotropowe** – własności fizyczne ciał zależą od kierunku.

Ad-3. Podstawowe elementy konstrukcyjne badanych ciał:

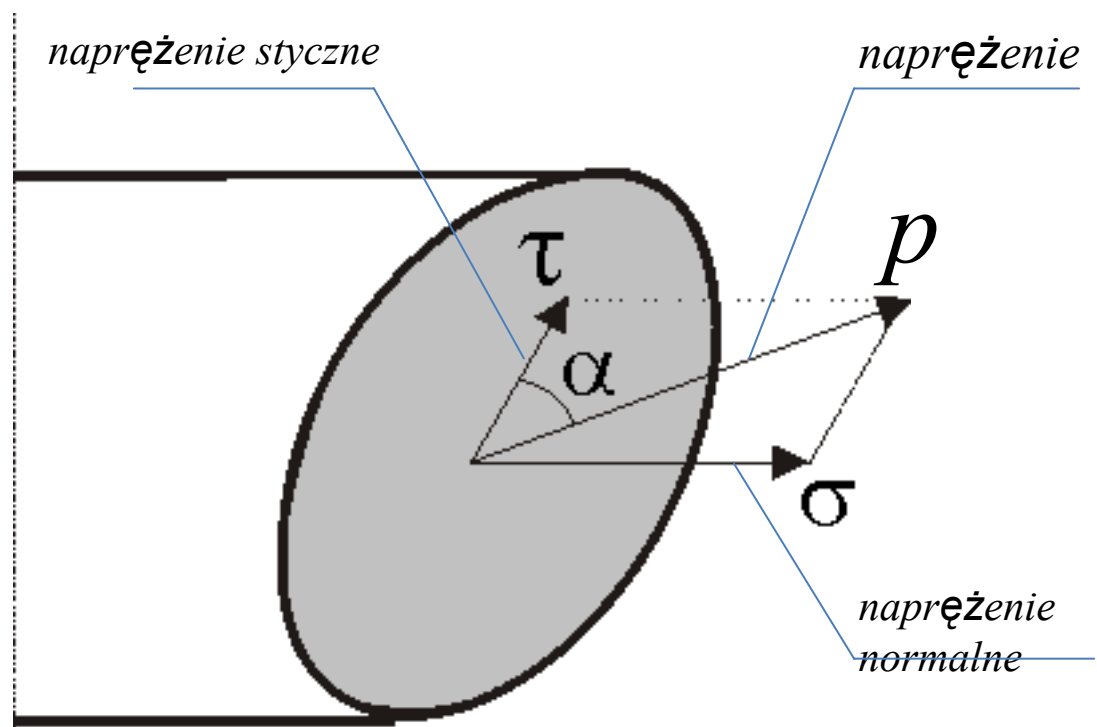
- **blok** - wszystkie wymiary ciała są tego samego rzędu,
- **plyta** - dwa wymiary przeważają nad trzecim,
- **pręt** (belka, słup, oś, wał, ciągnio) – jeden wymiar przeważa nad pozostałymi.
(Oś pręta: *miejsce geometryczne środków ciężkości przekrojów poprzecznych*)

Ad-4. Pojęcia podstawowe

- obciążenia zewnętrzne



- obciążenia wewnętrzne



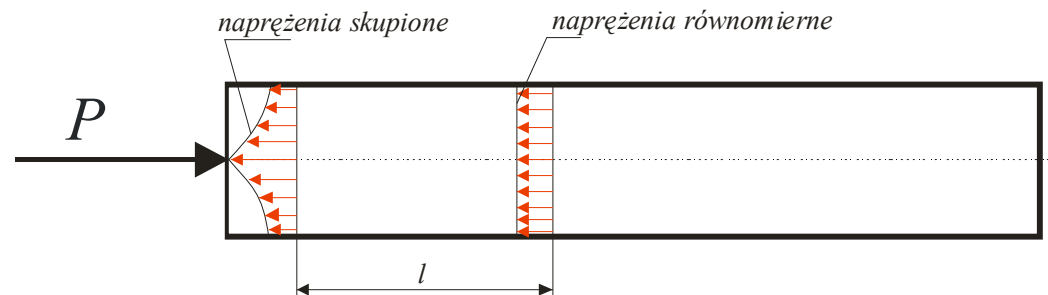
$$\tau = p \cos \alpha$$

$$\sigma = p \sin \alpha$$

Ad-5. Główne zasady wytrzymałości materiałów

- Zasada de Saint-Venanta

Jeśli na pewien niewielki obszar ciała sprężystego w równowadze działa ją statycznie równoważne obciążenia (siły skupione), to w odległości od obszaru przewyższającej wyrażnie jego rozmiary, powstają praktycznie jednakowe stany naprężenia i odkształcenia.

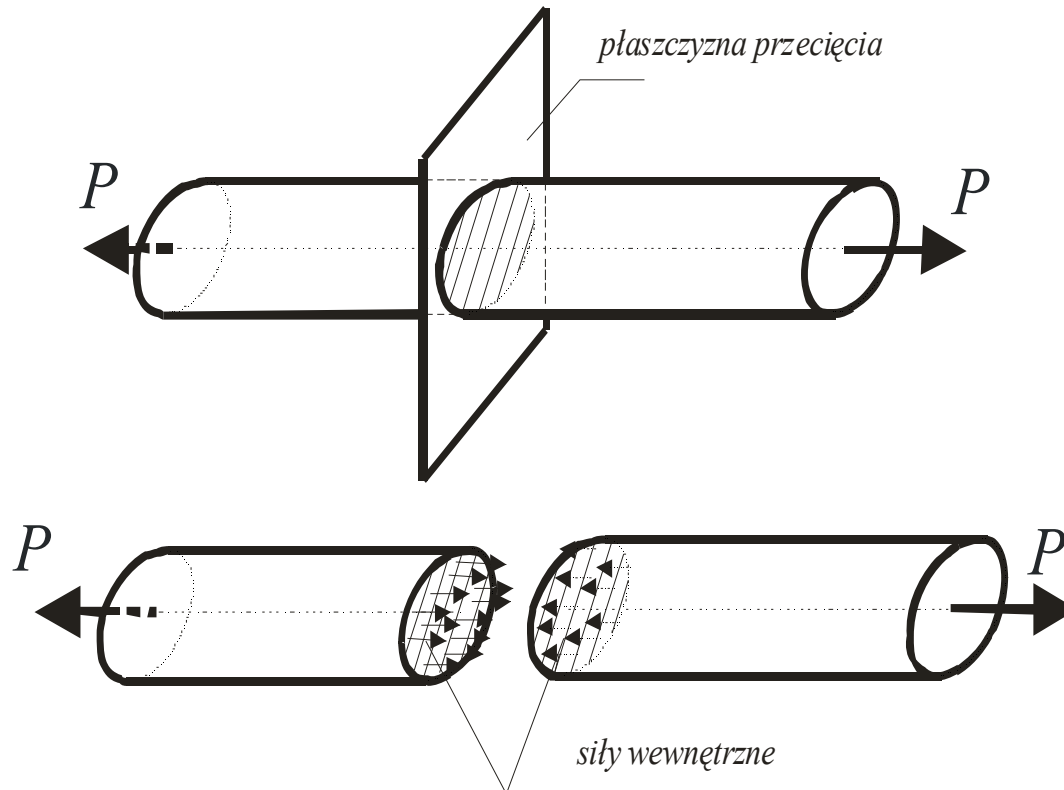


- Zasada superpozycji:

Skutek w określonym miejscu i kierunku, wywołany przez zespół przyczyn działających równocześnie, można uważać za sumę algebraiczną skutków wywołanych w tym miejscu i kierunku przez każdą przyczynę z osobna.

Ad-6. Rodzaje naprężeń

- rozciąganie i ściskanie

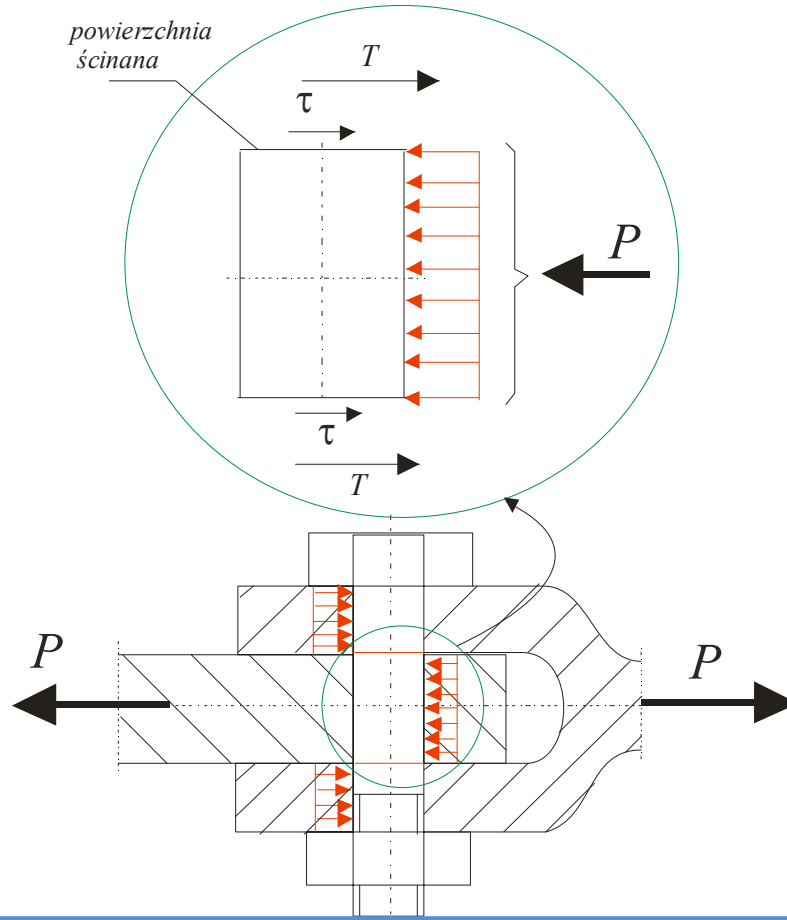


$$\sigma = \pm \frac{P}{A}$$

Na pręt działają dwie siły równe, przeciwnie skierowane i działające wzdłuż osi pręta.

- ścinanie technologiczne:

Pod wpływem szczególnego obciążenia zewnętrznego elementu konstrukcji mogą powstawać naprężenia styczne.

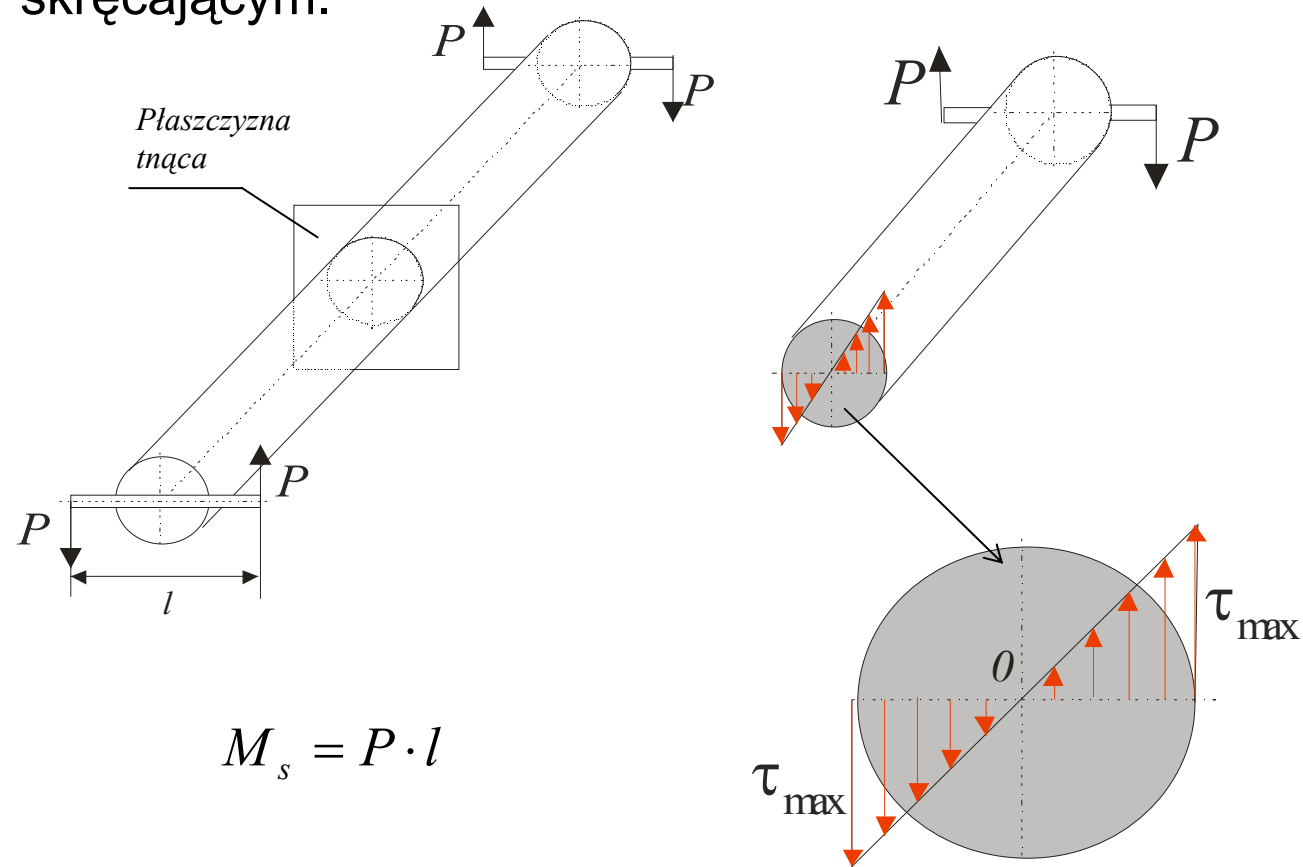


$$P = 2T$$

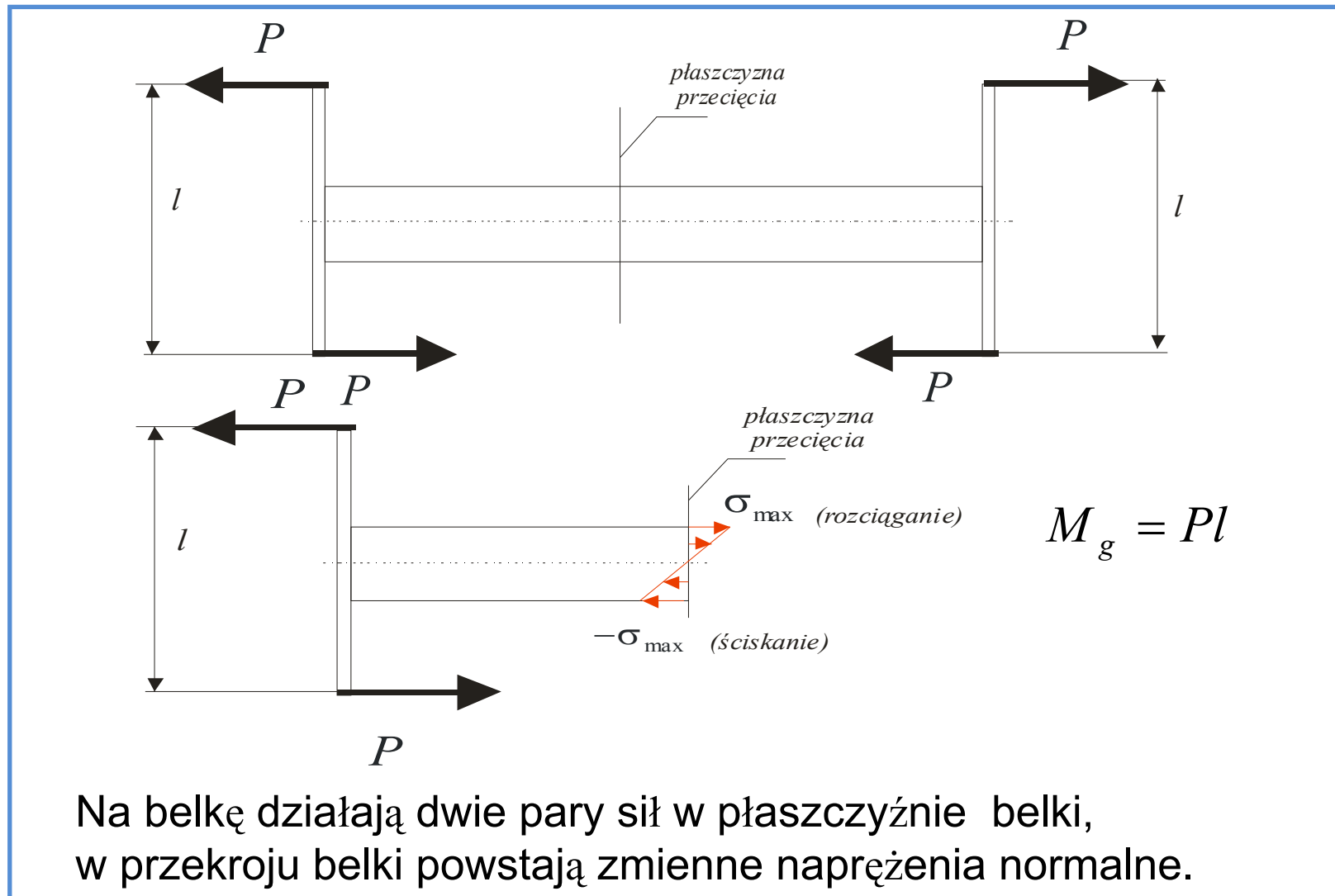
$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{P}{2A}$$

- skręcanie:

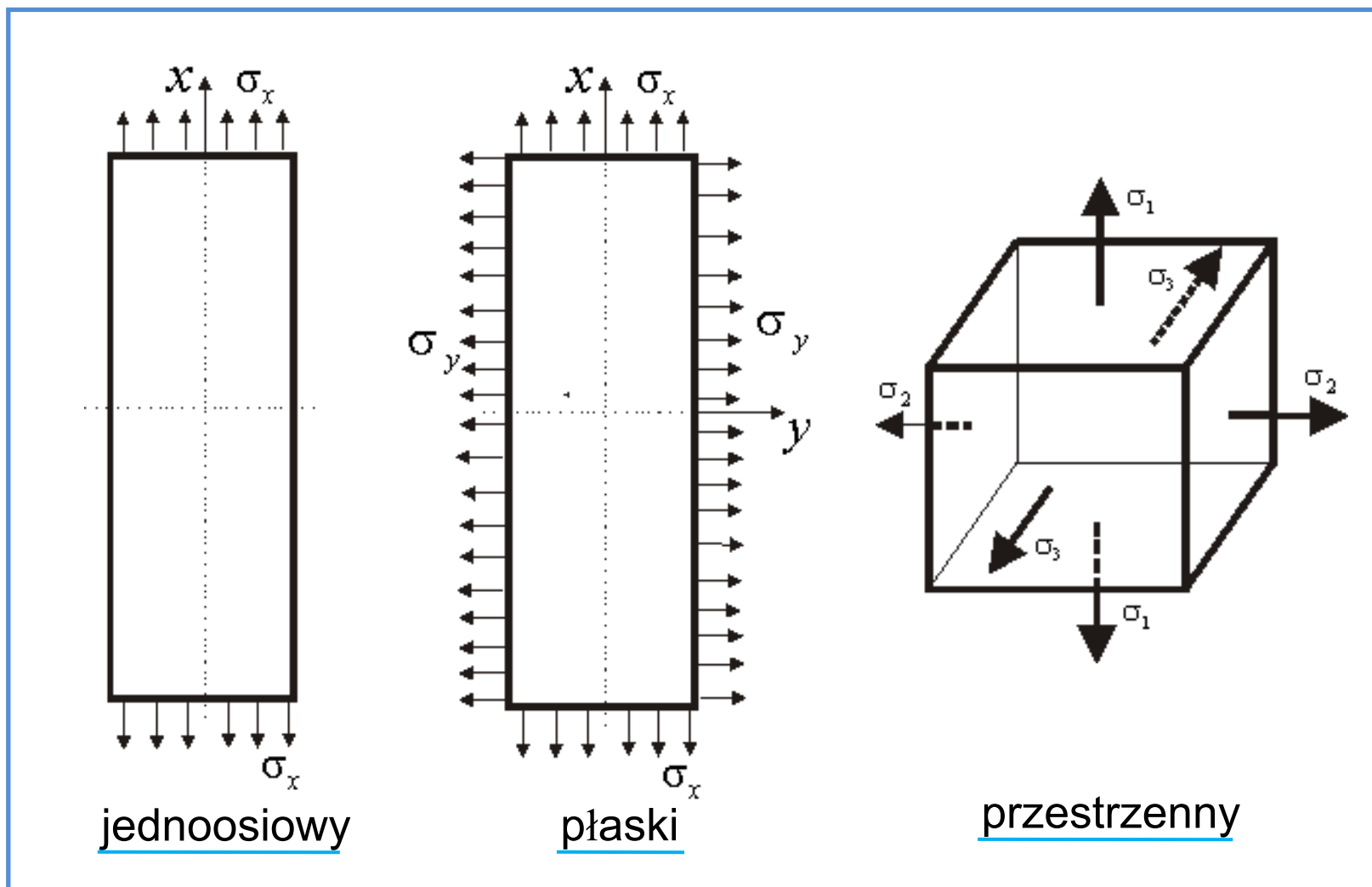
Powodowane jest działaniem dwóch par sił przyłożonych do pręta w dwóch różnych płaszczyznach prostopadłych do jego osi. Moment taki nazywamy skręcającym.



• zginanie:



- stany naprężeń:



Ad-7. Podstawy projektowania

Projektowanie konstrukcji oparte jest na spełnieniu dwóch głównych warunków: **wytrzymałości i sztywności**.

| Stan obciążenia | Naprężenia dopuszczalne | Warunki sztywności |
|---------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|
| rozciąganie lub ściskanie | $\sigma_{r,c} \leq k_{r,c}$ | $\varepsilon \leq \varepsilon_{dop}$ |
| ściananie lub skręcanie | $\tau \leq k_{t,s}$ | $\varphi \leq \varphi_{dop}$ |
| zginanie | $\sigma_g \leq k_g$ | $y \leq f_{dop}$ |

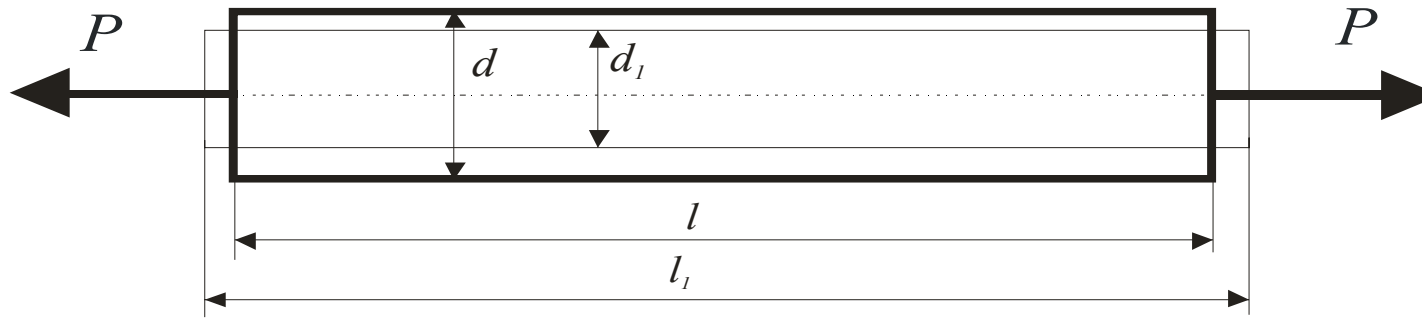
$\sigma_{r,c}; \tau; \sigma_g$ - naprężenia: rozciągające (ściskające), ścinające zginające,

$\varepsilon; \varphi; y$ - odkształcenie rozciągające (ściskające) i skręcające, ugięcie

VII. ROZCIĄGANIE I ŚCISKANIE PRĘTÓW.

Prawo Hooke'a. Odkształcenie przy rozciąganiu i ściskaniu.

Odkształcenie pręta przy rozciąganiu.



Siły są równoległe do osi pręta.

- wydłużenie bezwzględne pręta:

$$\Delta l = l_1 - l$$

- wydłużenie względne pręta:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l}$$

- zmiana wymiarów poprzecznych:

$$\varepsilon_{pop} = \frac{\Delta d}{d} = \frac{d_1 - d}{d}$$

- liczba Poissona:

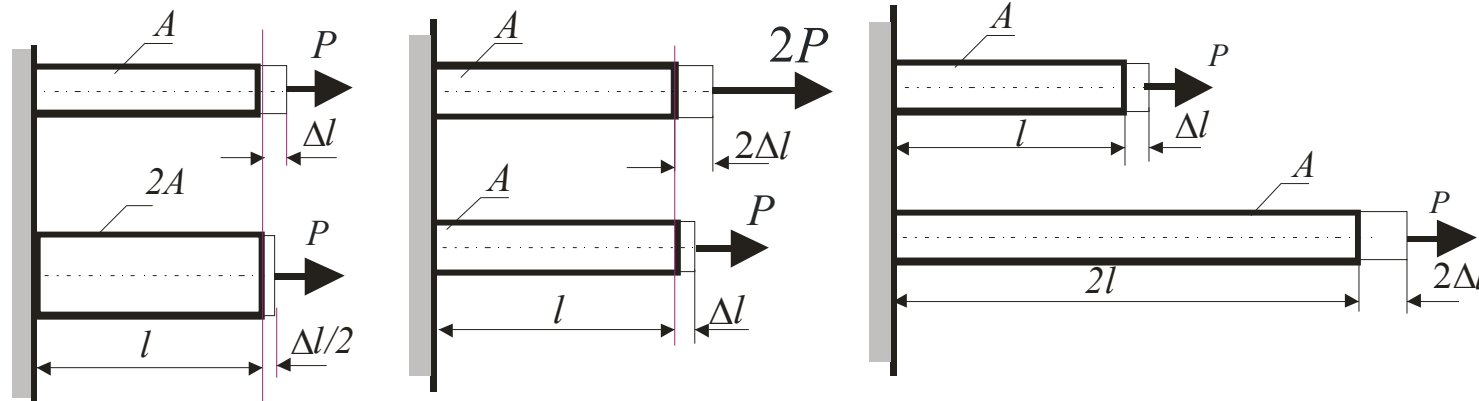
$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_{pop}}{\varepsilon} \right| \quad \text{lub} \quad \varepsilon_{pop} = -\nu \varepsilon$$

Prawo Hooke'a:

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$; $\sigma = \frac{P}{A}$ - wydłużenie względne i naprężenie normalne

$E \left[\frac{N}{m^2} \right]$ - moduł sprężystości przy rozciąganiu (moduł Younga)



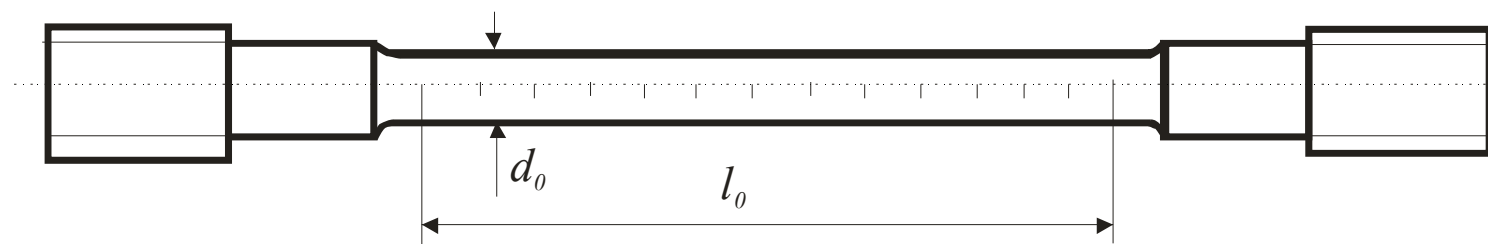
- przykłady rozciągania pręta

Próba rozciągania.

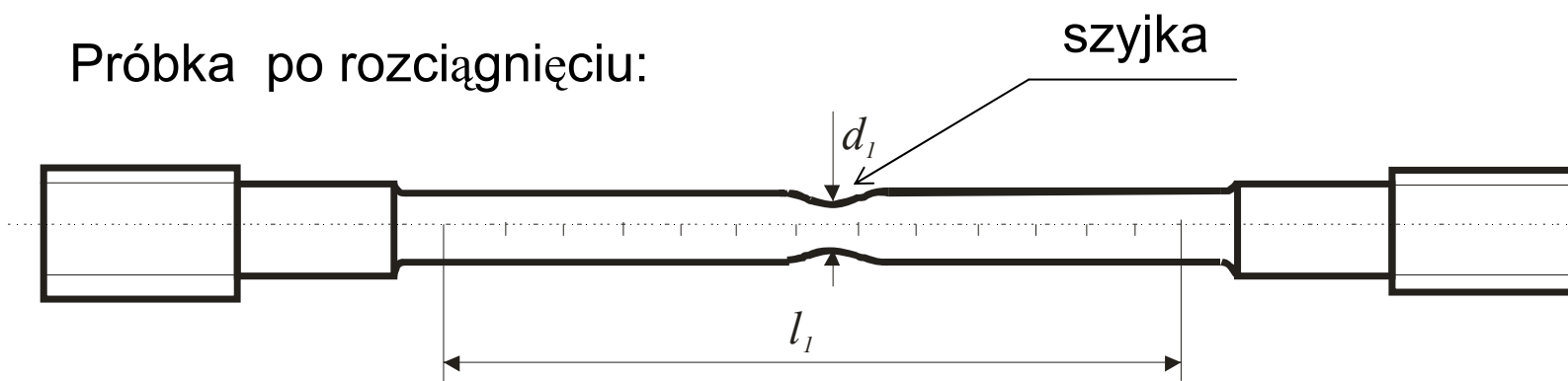


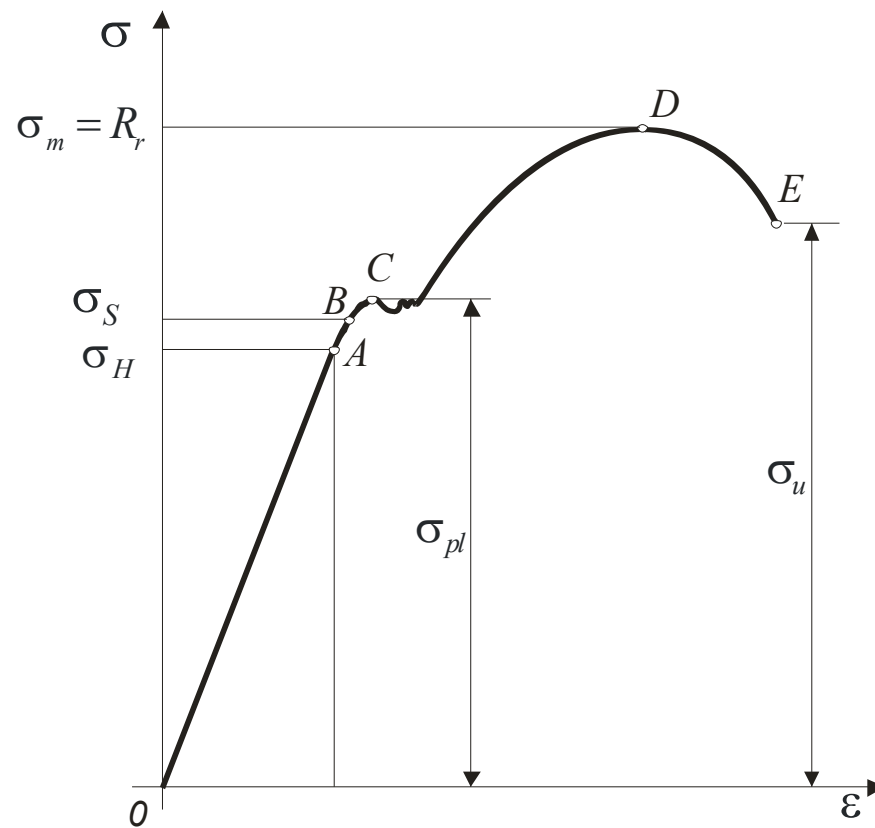
Maszyna wytrzymałościowa INSTRON

Próbka rozciągnana:



Próbka po rozciągnięciu:





Wykres rozciągania pręta.

1. Granica proporcjonalności - σ_H (0A-odcinek linii prostej)
2. Granica sprężystości - σ_s (AB, po zdjęciu obciążenia próbka nie ma trwałych odkształceń. Energia nagromadzona w ciele podczas odkształcenia (praca odkształcenia) zostaje w całości zwrócona)
3. Fizyczna (wyraźna) granica plastyczności - σ_{pl} (BC, przy tym naprężeniu następuje nagłe wydłużenie próbki: $\sigma_{pl} = P_{pl} / A_0$
Punkt C jest początkiem płynięcia plastycznego (próbka wydłuża się bez wzrostu siły odkształcającej). Dla materiałów kruchych ten punkt ustala się umownie $\sigma_{pl} = 0,2\%$
4. Doraźna wytrzymałość na rozciąganie $R_r = P_{max} / A_0$
wielkość ta jest potrzebna do obliczenia naprężeń dopuszczalnych.

5. Rzeczywiste naprężenie rozrywające - $\sigma_u = P_u / A_1$

6. Wydłużenie plastyczne po zerwaniu - $(l - l_0) / l \cdot 100 \%$

7. Przewężenie przekroju poprzecznego

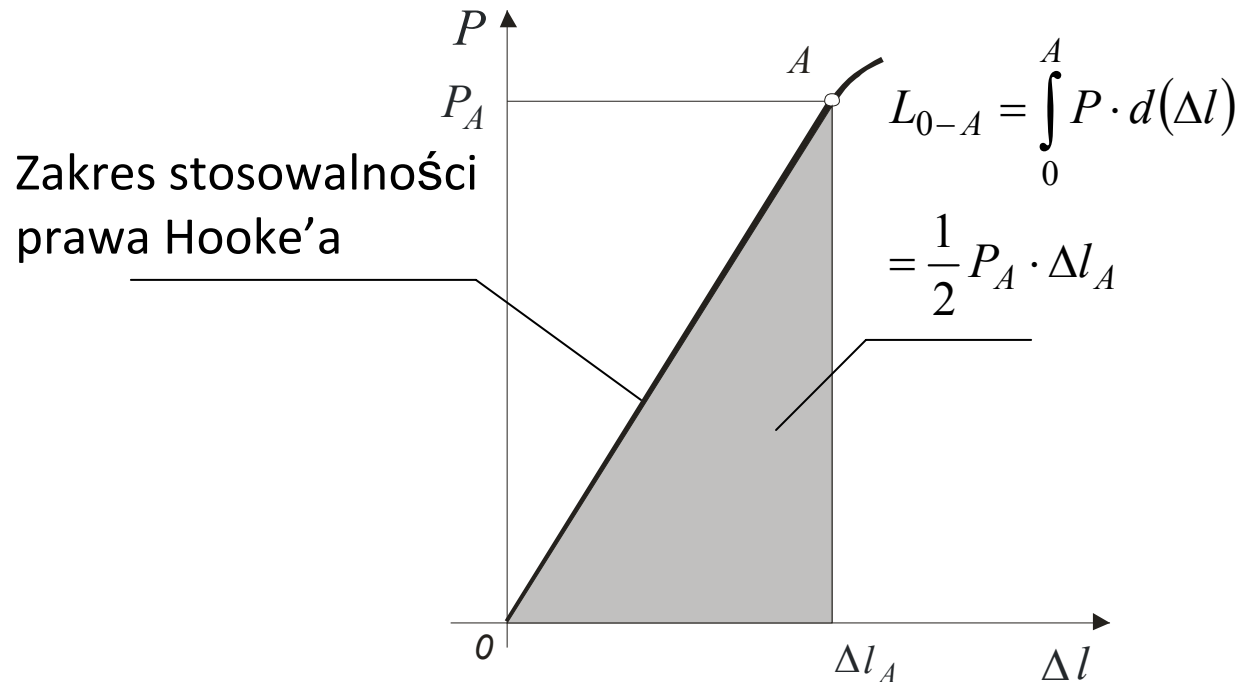
$$\frac{A_0 - A_u}{A_0} \cdot 100\% \Rightarrow \left[1 - \left(\frac{d_r}{d_0} \right)^2 \right] \cdot 100\%$$

A_u - pole najmniejszego przekroju po zerwaniu,

d_r - najmniejsza średnica próbki w miejscu zerwania.

Praca odkształcenia przy rozciąganiu

Praca odkształcenia określa odporność materiału na uderzenie.

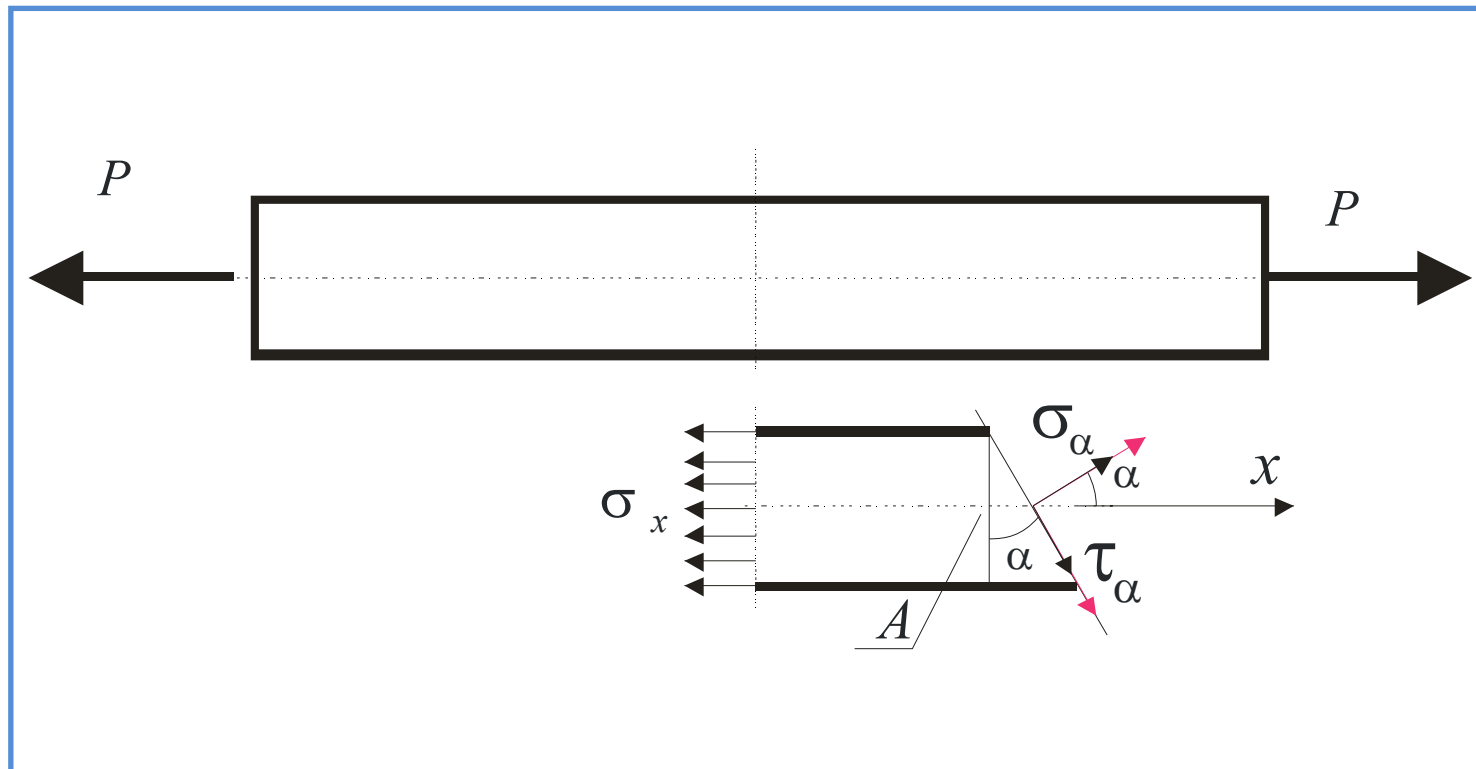


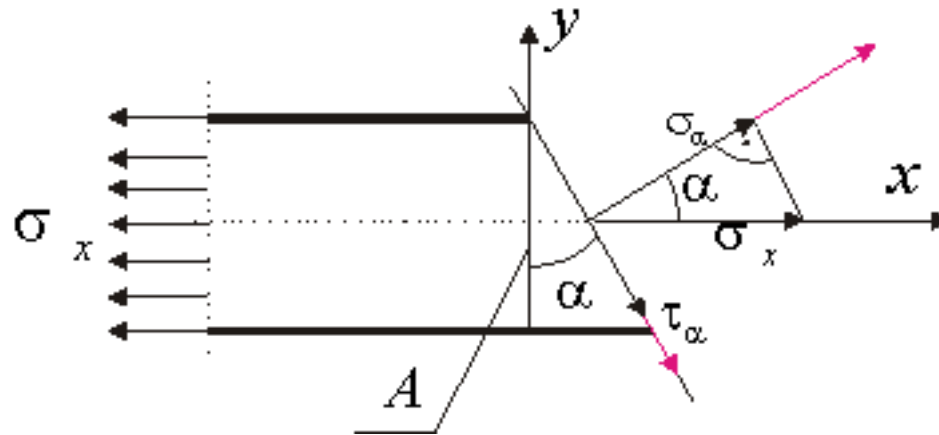
Praca odkształcenia sprężystego będzie zwrócona po odciążeniu pręta.

VIII. ANALIZA STANU NAPRĘŻEŃ.

1. Jednowymiarowy stan naprężenia.
2. Dwuwymiarowy stan naprężenia.
3. Trójwymiarowy stan naprężenia.
4. Uogólnione prawo Hooke'a.
5. Odkształcenia postaciowe a naprężenie styczne.

Ad.-1. Jednowymiarowy stan naprężenia

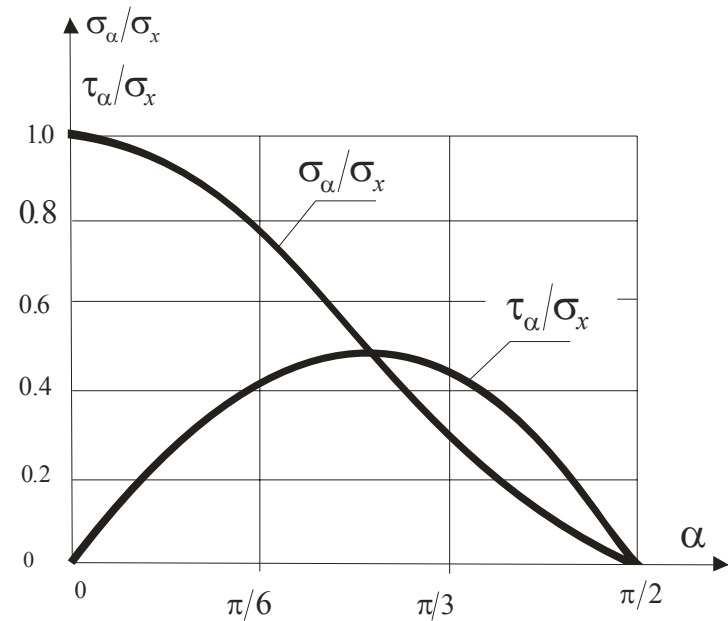


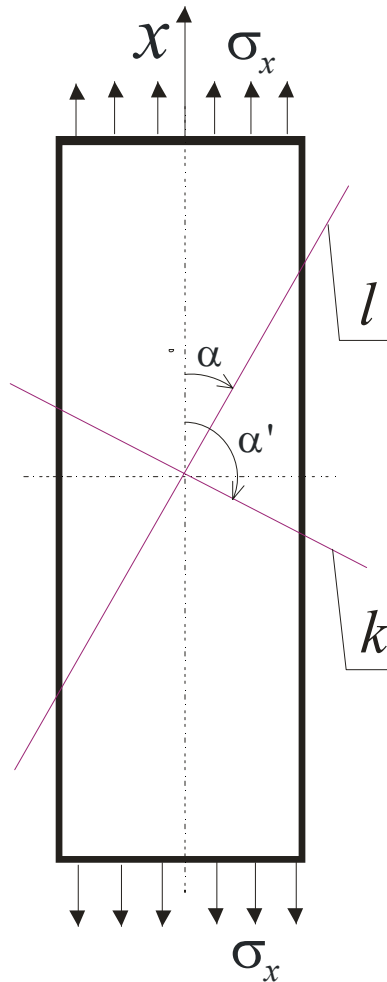


$$\sum P_x = -\sigma_x A + \sigma_\alpha \frac{A}{\cos \alpha} \cos \alpha + \tau_\alpha \frac{A}{\cos \alpha} \sin \alpha = 0$$

$$\sum P_y = \sigma_\alpha \frac{A}{\cos \alpha} \sin \alpha - \tau_\alpha \frac{A}{\cos \alpha} \cos \alpha = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha \quad i \quad \tau_\alpha = \sigma_x \frac{\sin 2\alpha}{2}$$





Pręt jest przekrojony dwiema płaszczyznami (l) i (k), obróconymi względem siebie o kąt $\pi/2$

$$\alpha; \alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

- naprężenia w pierwszym przekroju pręta (l) są identyczne jak w wyżej rozpatrywanym przypadku,

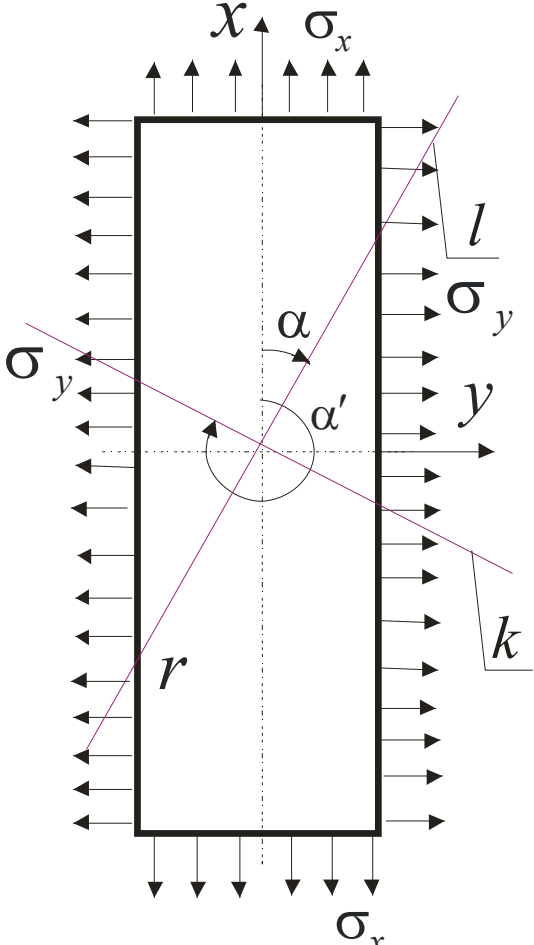
- naprężenia w drugim przekroju (k) wynoszą

$$\sigma'_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha' = \sigma_x \cos^2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \sigma_x \sin^2 \alpha,$$

$$\tau' = \sigma_x \frac{\sin 2\alpha'}{2} = \sigma_x \frac{\sin 2 \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)}{2} = -\sigma_x \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

Naprężenia styczne w dwóch wzajemnie prostopadłych przekrojach są sobie równe co do modułu.

Ad -2. Dwuwymiarowy stan naprężenia



Naprężenia w przekroju (k):

Przy obciążeniu płytki naprężeniami σ_x w tym przekroju naprężenia normalne i styczne są równe:

$$\sigma' = \sigma_x \cos^2 \alpha, \quad \tau' = \frac{\sigma_x \sin 2\alpha}{2}$$

Przy obciążeniu płytki naprężeniami σ_y w tym samym przekroju naprężenia normalne i styczne są równe:

$$\sigma'' = \sigma_y \sin^2 \alpha, \quad \tau'' = -\frac{\sigma_y \sin 2\alpha}{2}$$

Całkowite naprężenia normalne:

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha$$

całkowite naprężenia styczne:

$$\tau = \tau' + \tau'' = \frac{\sigma_x \sin 2\alpha}{2} - \frac{\sigma_y \sin 2\alpha}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha$$

Wartości ekstremalne naprężeń:

- dla

$$\alpha = \pi/4 \Rightarrow \sin 2\alpha = 1; \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = -1$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \quad \text{lub} \quad \tau_{\max} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

Przekroje, w których naprężenia normalne będą osiągały wartości ekstremalne:

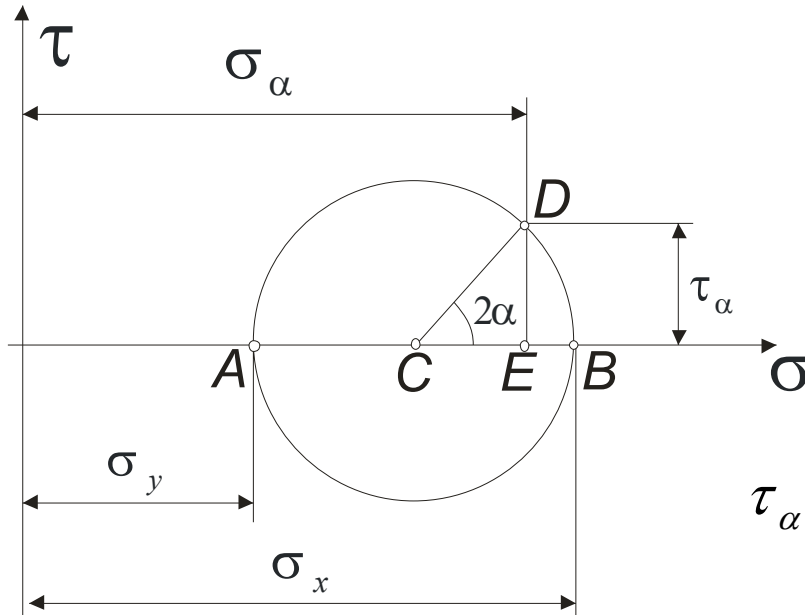
$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\alpha} &= -2\sigma_x \cos \alpha \sin \alpha + 2\sigma_y \cos \alpha \sin \alpha \\ &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$2\alpha = 0 \quad \text{albo} \quad 2\alpha = \pi \Rightarrow \alpha = 0 \quad \text{albo} \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Naprężenia normalne są największe lub najmniejsze w przekrojach równoległych i prostopadłych do kierunków działania naprężeń σ_x i σ_y .

Koło Mohra

Koło Mohra służy do określania naprężeń normalnych w dowolnym ukośnym przekroju nachylonym do płaszczyzn głównych.

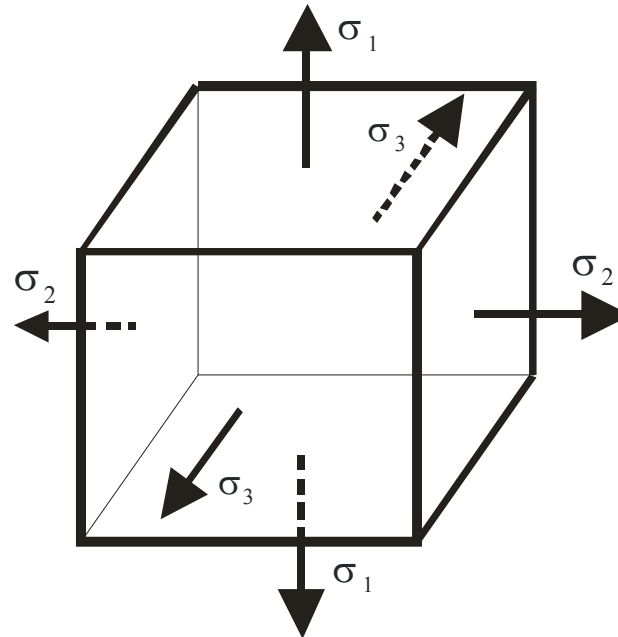


$$AC = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2},$$

$$\tau_\alpha = CD \sin 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha,$$

$$\sigma_\alpha = OA + AC + CE = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha$$

Ad.-3 Trójwymiarowy stan naprężeń



Ad.-4. Uogólnione prawo Hooke'a . Związek między odkształceniami i naprężeniami wielokierunkowymi.

Korzystając z zasady superpozycji możemy napisać:

- wydłużenie w kierunku x:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

- wydłużenie w kierunku y:

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)]$$

- wydłużenie w kierunku z:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$

Względny przyrost objętości:

$$\frac{V - V_0}{V_0} = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1$$

Po odrzuceniu małych wyższego rzędu mamy:

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1 - 2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Jeżeli wszystkie naprężenia są równe:

$$\frac{V - V_0}{V_0} = \frac{1 - 2\nu}{E} 3\sigma$$

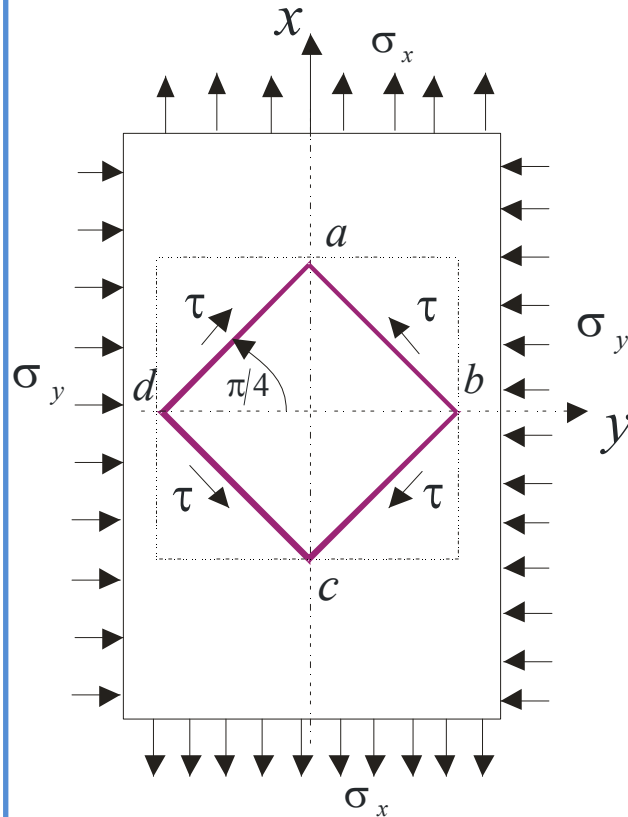
Współczynnik sprężystości objętościowej (*współczynnik ściśliwości sprężystej*):

$$K = \frac{\sigma}{\Delta V / V_0} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \Rightarrow \sigma = K \frac{\Delta V}{V_0}$$

Dla materiału nieściśliwego ($\nu = 0.5$) współczynnik ściśliwości $K \rightarrow \infty$

Ad.-5 Odkształcenia postaciowe a naprężenie styczne.

Czyste ścinanie

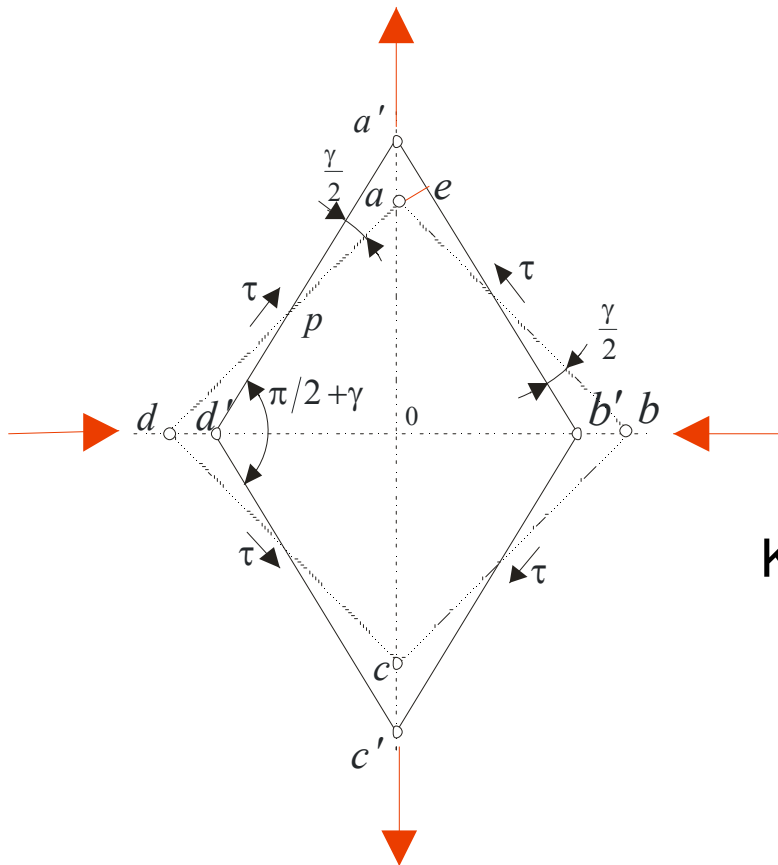


Naprężenia w przekroju *ab* przy czystym ścinaniu są równe:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = 0, \quad \sigma_x = -\sigma_y,$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha \neq 0.$$

Jaka występuje zależność między odkształceniem kątowym a skróceniem względnym przekątnej *db* lub wydłużeniem względnym przekątnej *ac*.



Wydłużenie połowy przekątnej
i połowy boku kwadratu:

$$aa' = \frac{\varepsilon_x}{2} = \frac{\sigma_x}{2E}(1+\nu) \quad ad = a'd'$$

$$ad = \frac{ac}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad pa' = \frac{d'a'}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Długość odcinka $a'e$

$$a'e = \frac{aa'}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_x}{2\sqrt{2}E}(1+\nu)$$

Kąt odkształcenia postaciowego:

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{a'e}{pa'} = \frac{\sigma_x(1+\nu)2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}E} = \frac{\sigma_x}{E}(1+\nu)$$

$$\gamma = \frac{2\sigma_x}{E}(1+\nu) = \frac{2\tau}{E}(1+\nu) \quad (*)$$

W stanie czystego ścinania wprowadzamy pojęcie *współczynnika sprężystości postaciowej* G , który nazywany jest modułem *Kirchhoffa*. Współczynnik ten jest równy stosunkowi sprężystego odkształcenia postaciowego γ do naprężenia stycznego τ .

Prawo *Hooke'a* dla czystego ścinania:

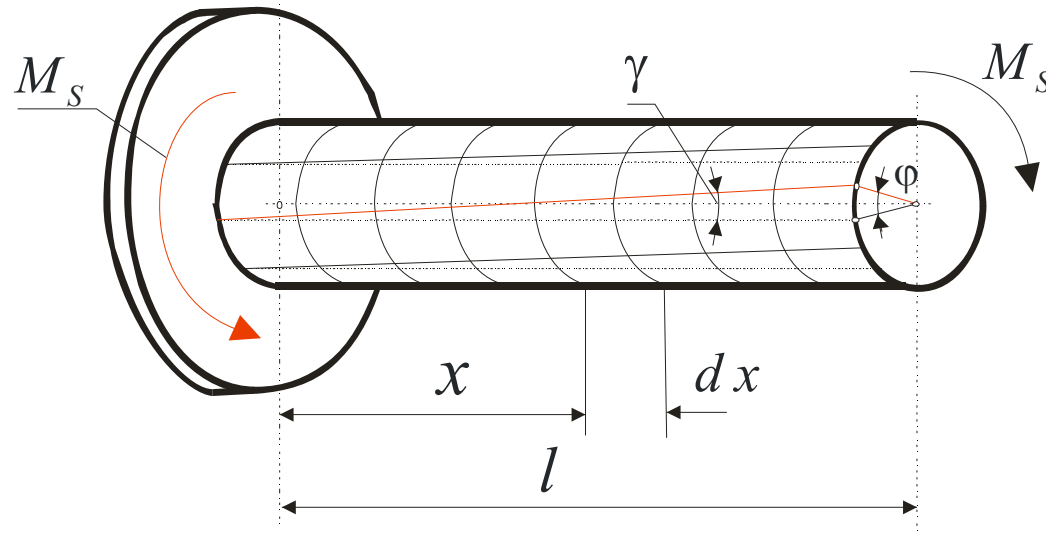
$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Zależność między modułem *Younga* i współczynnikiem sprężystości postaciowej wynika ze wzoru (*)

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

IX. SKRĘCANIE WAŁÓW.

Skręcenie wału powstaje pod wpływem działania dwóch par sił o przeciwnych zwrotach, znajdujących się w dwóch różnych płaszczyznach prostopadłych do osi wału i oddalonych od siebie o l .



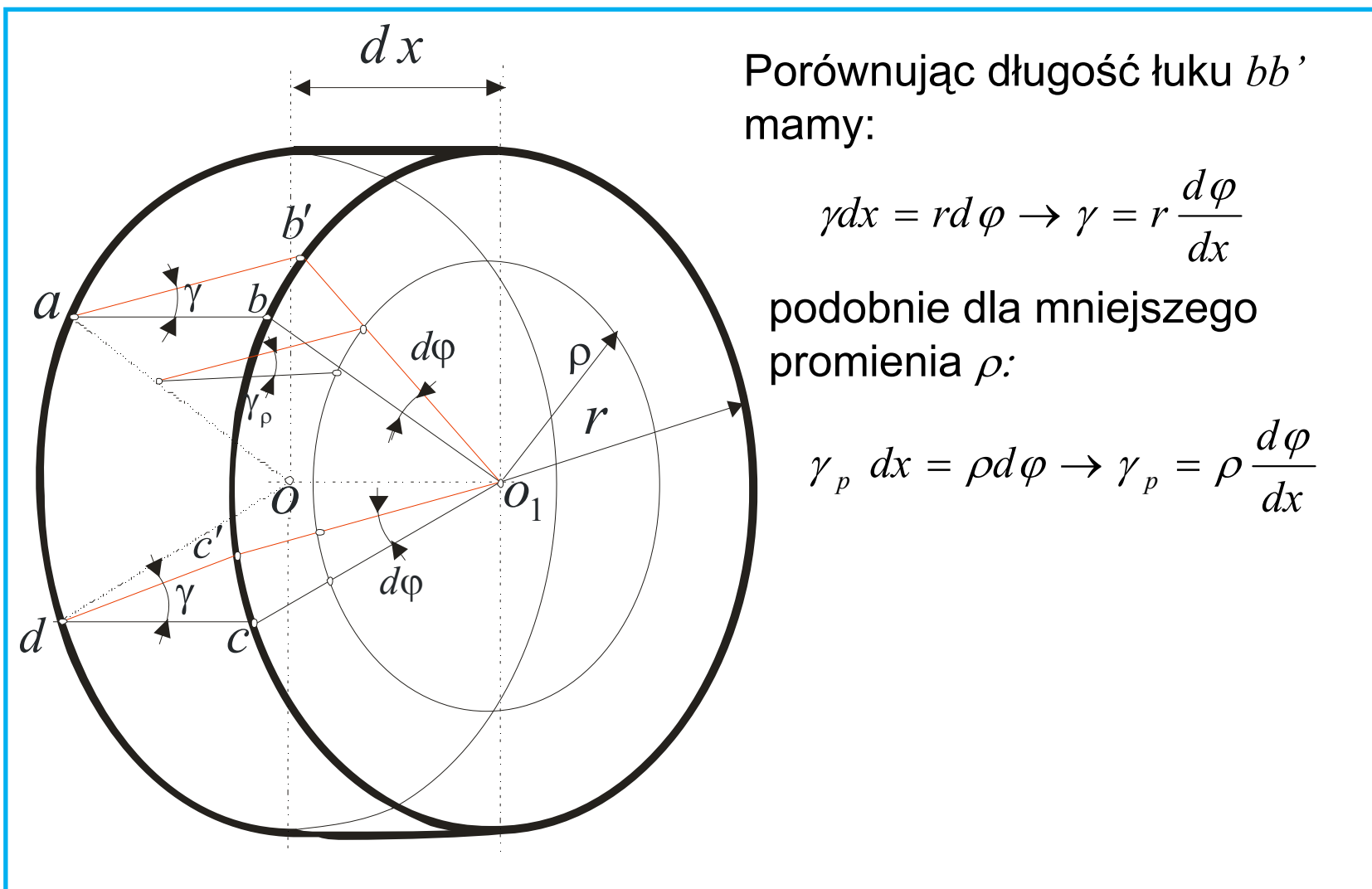
Model skręcania wału

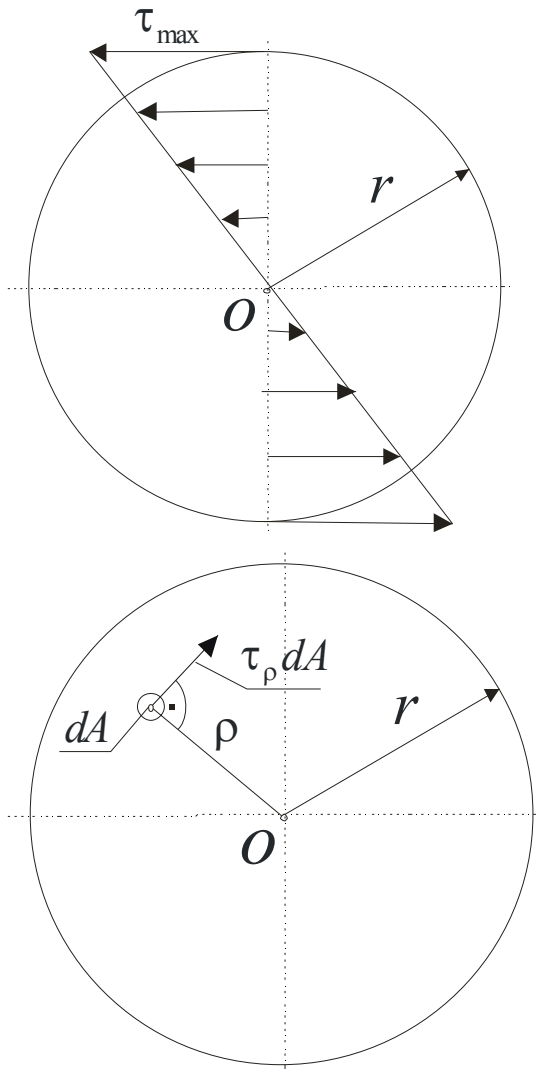
Kątem skręcenia wału φ nazywamy kąt, o jaki obróćą się względem siebie przekroje prostopadłe do osi wału i oddalone o l , do których przyłożone są momenty skręcające.

Założenia modelowe:

- *oś wału pozostaje linią prostą;*
- *tworzące, początkowo równoległe do osi wału, po skręceniu przyjmują kształt linii śrubowej nachylonej pod kątem γ ;*
- *prostokąty przekształcają się w równoległoboki;*
- *okręgi na powierzchni wału zachowują swój kształt i nie zmieniają swojej średnicy, przekrój czołowy dalej jest płaski;*
- *promienie przekrojów czołowych po odkształceniu wału dalej są płaskie;*
- *przekrój utwierdzony jest nieruchomy, pozostałe przekroje obracają się dookoła osi wału, kąt obrotu względem siebie dwóch dowolnych przekrojów jest wprost proporcjonalny do odległości między nimi;*
- *odległości pomiędzy przekrojami jest stała.*

Związek między odkształceniami i naprężeniami wału:





Zgodnie z prawem Hooke'a
naprężenia styczne określają wzory:

$$\tau_{\max} = G\gamma = Gr \frac{d\varphi}{dx} \quad \tau_{\rho} = G\gamma_{\rho} = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

Suma elementarnych momentów
stycznych wynosi:

$$\begin{aligned} M_s &= \int_A \tau_{\rho} \rho dA = \int_A G\rho \frac{d\varphi}{dx} \rho dA = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA \\ &= G \frac{d\varphi}{dx} J_0, \text{ gdzie } J_0 \text{ jest biegunowym} \\ &\text{momentem bezwładności.} \end{aligned}$$

Przekształcając dalej otrzymujemy
wzór na kąt skręcenia na długości l :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_s}{GJ_0} \rightarrow \varphi = \int_0^l \frac{M_s dx}{GJ_0} = \frac{M_s l}{GJ_0}$$

Naprężenia styczne w zależności od momentu skręcającego określają wzory :

$$\tau_{\rho} = \frac{M_s \rho}{J_0} \quad i \quad \tau_{\max} = \frac{M_s r}{J_0}$$

Wprowadzając wskaźnik wytrzymałości przekroju przy skręcaniu:

$$W_0 = \frac{J_0}{r}$$

Warunki wytrzymałościowe ze względu na naprężenia dopuszczalne i sztywność są odpowiednio równe:

$$\tau_{\max} = \frac{M_s}{W_0} \leq k_t \quad i \quad \varphi = \frac{M_s l}{GJ_0} \leq \varphi_{dop},$$

gdzie k_t jest dopuszczalnym naprężeniem na ścinanie, a φ_{dop} dopuszczalnym kątem skręcenia.

Skręcanie wałów obrotowych

Wał obrotowy o promieniu r przenosi moment M i moc N .

Strumień pracy \dot{L} (moc) przenoszony przez wał jest równy:

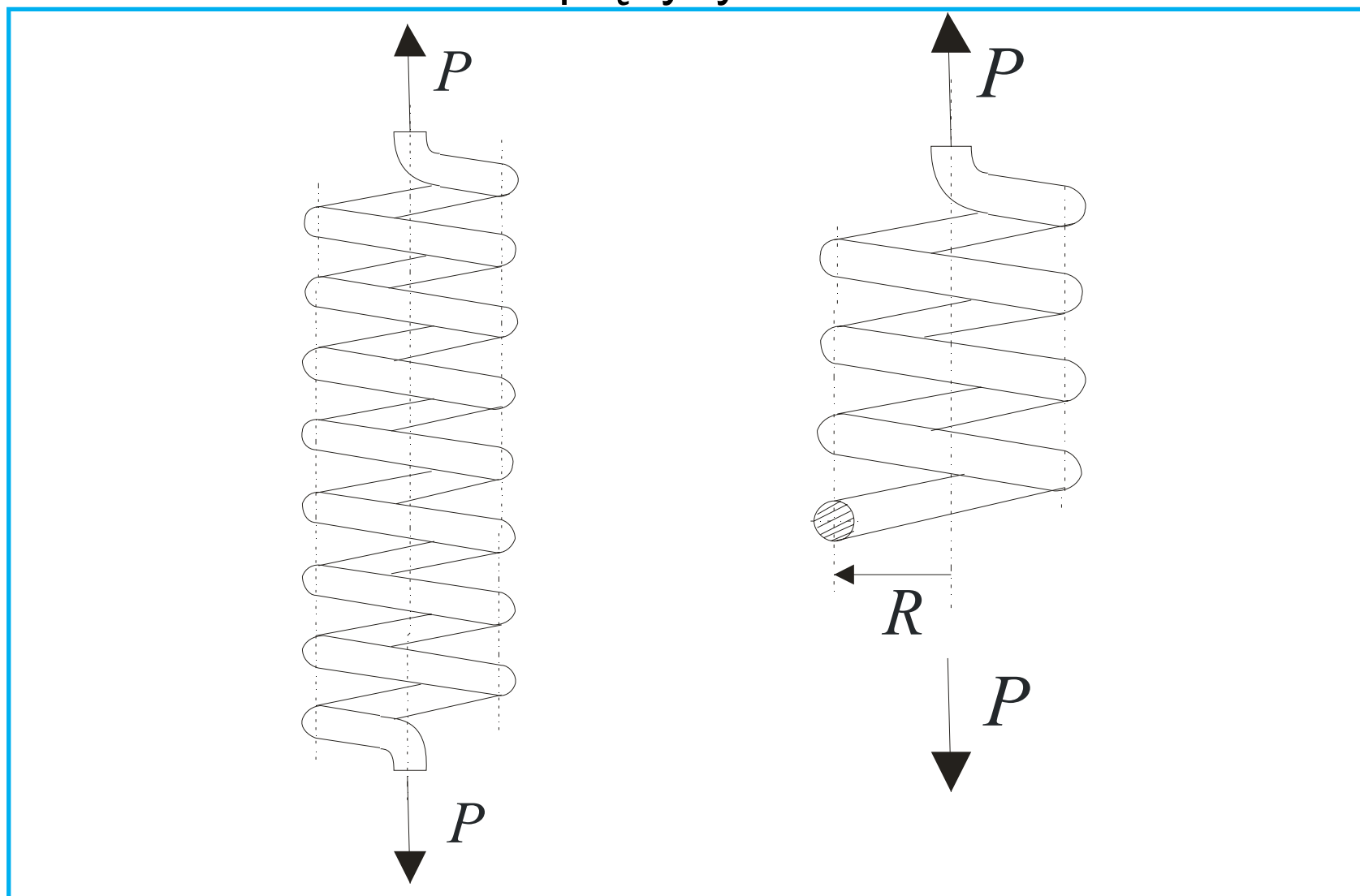
$$N = \dot{L} = \frac{dL}{dt}.$$

Średnia moc:

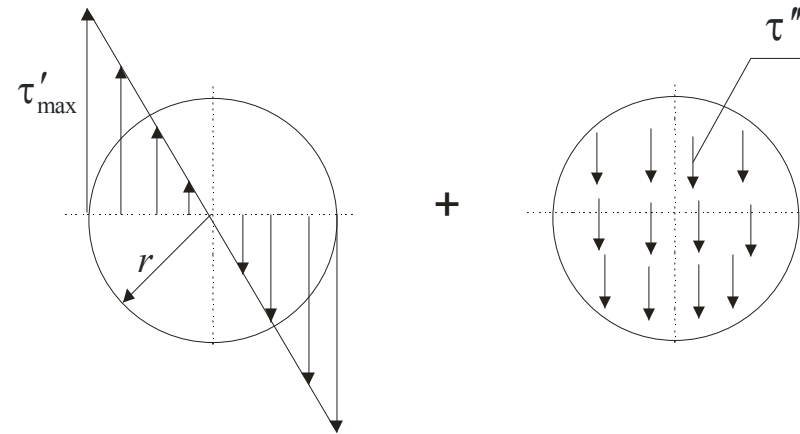
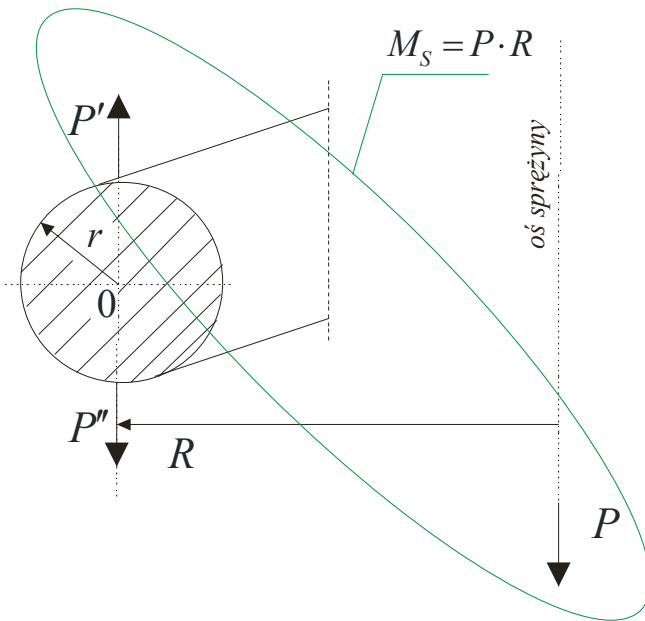
$$N = \frac{L}{t} = \frac{2 Pr \varphi}{t} = \frac{M \varphi}{t} = M \omega = \frac{M 2 \pi n}{60},$$

gdzie n oznacza ilość obrotów na minutę.

Sprężyny



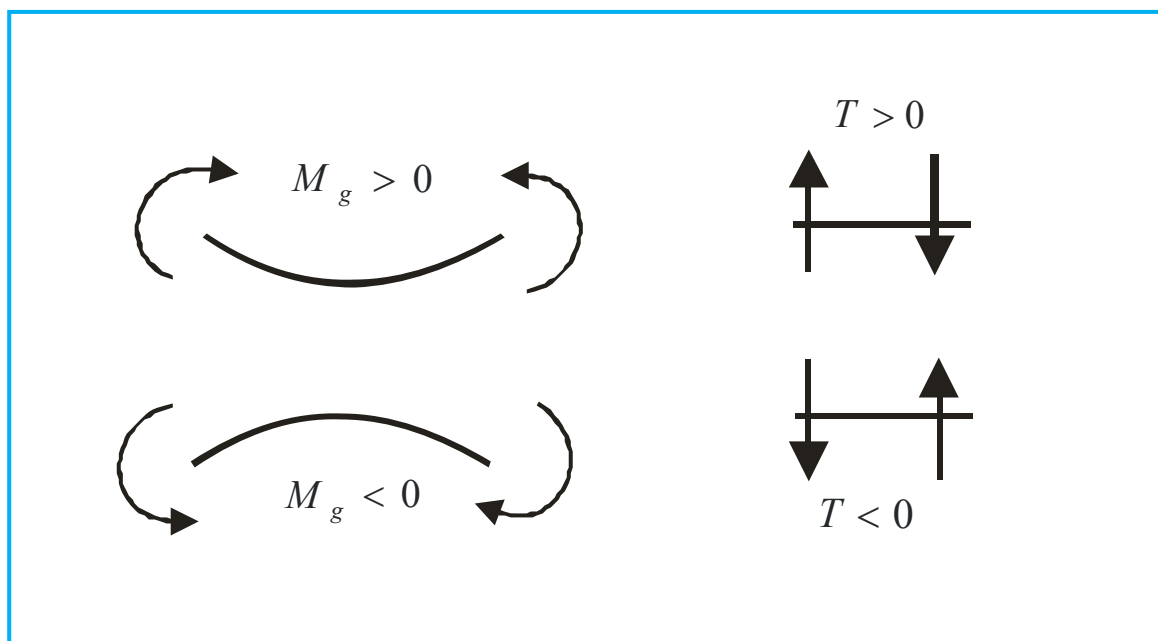
Superpozycja naprężeń stycznych



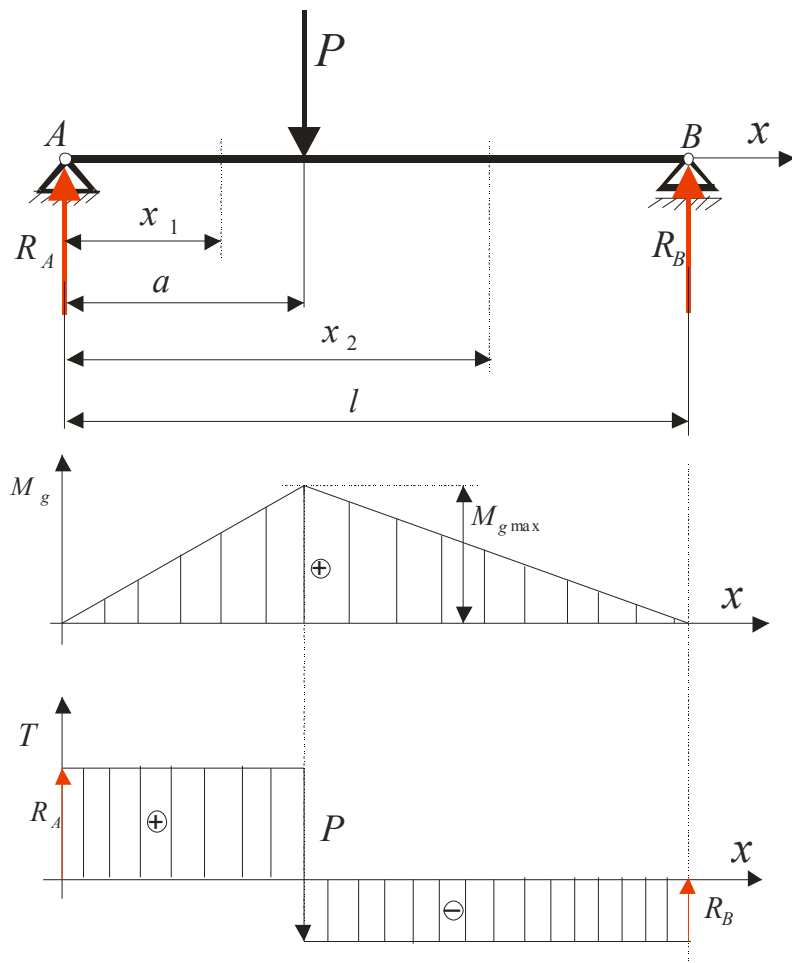
$$\tau'_{\max} = \frac{M_s}{W_0} = \frac{2PR}{\pi r^3} \quad i \quad \tau'' = \frac{P}{A} = \frac{P}{\pi r^2} \quad \rightarrow \quad \tau = \tau'_{\max} + \tau'' = \frac{P}{\pi r^2} \left(\frac{2R}{r} + 1 \right)$$

X. ZGINANIE PRĘTÓW (BELEK) PROSTYCH.

Moment zginający i siła poprzeczna:



Wykresy momentów zginających i sił poprzecznych:



przedział : $0 \leq x_1 \leq a$

$$M(x_1) = R_A x_1 = \frac{P(l-a)}{l} x_1$$

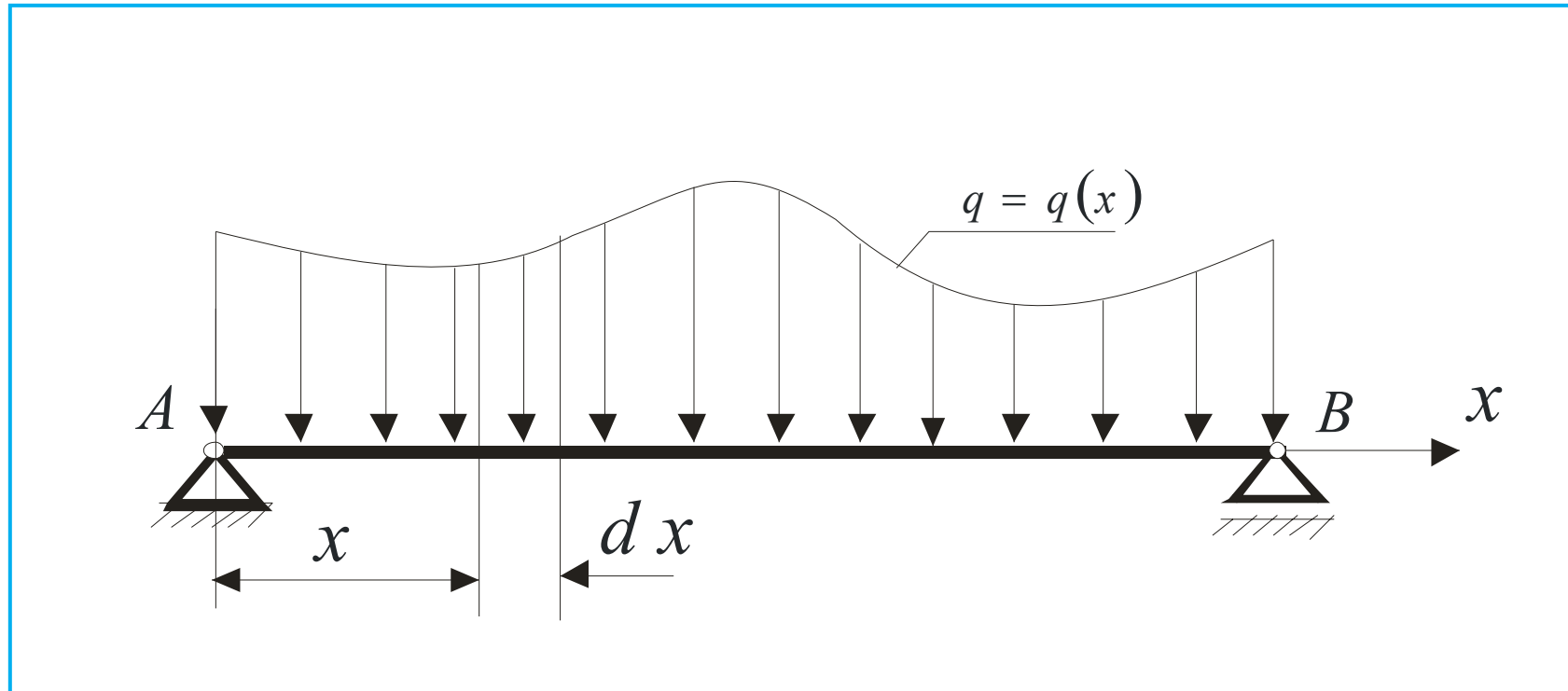
$$T(x_1) = R_A = \frac{P(l-a)}{l}$$

przedział: $a \leq x_2 \leq l$

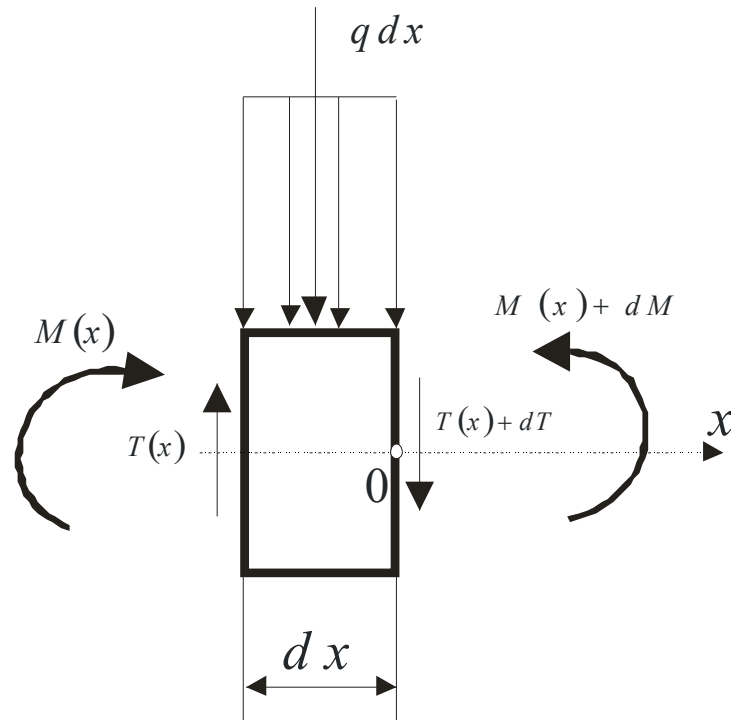
$$M(x_2) = R_A x_2 - P(x_2 - a) = \frac{Pa}{l} (l - x_2)$$

$$T(x_2) = R_A - P = -\frac{Pa}{l}$$

Zależności różniczkowe pomiędzy obciążeniem zewnętrznym, siłą poprzeczną i momentem zginającym.



Zależności różniczkowe pomiędzy obciążeniem zewnętrznym, siłą poprzeczną i momentem zginającym.



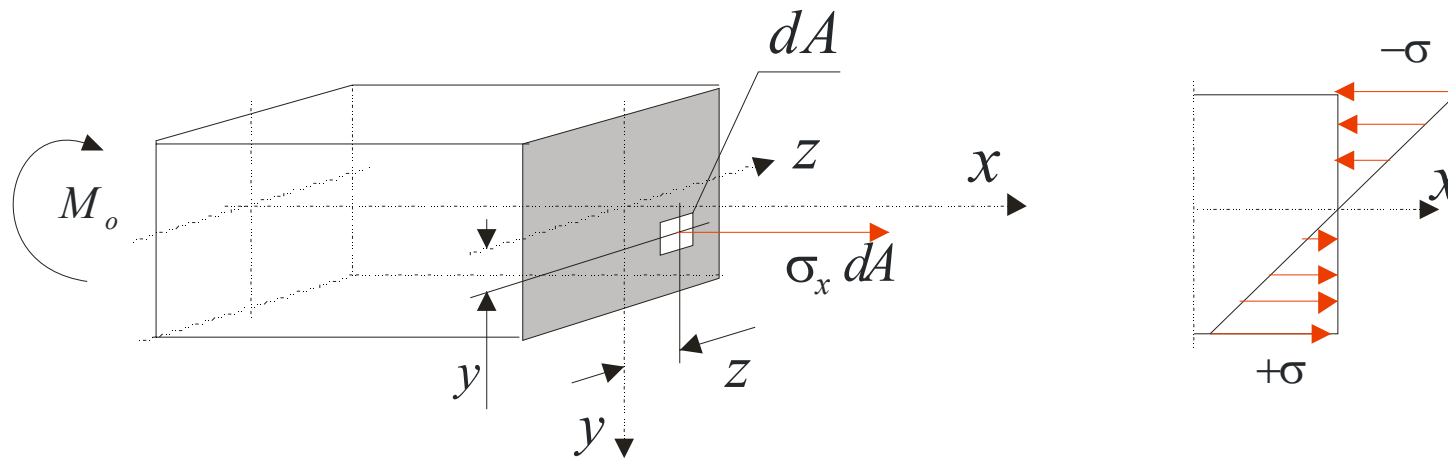
$$\sum X = T(x) - q dx - (T(x) + dT(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dT(x)}{dx} = -q(x)$$

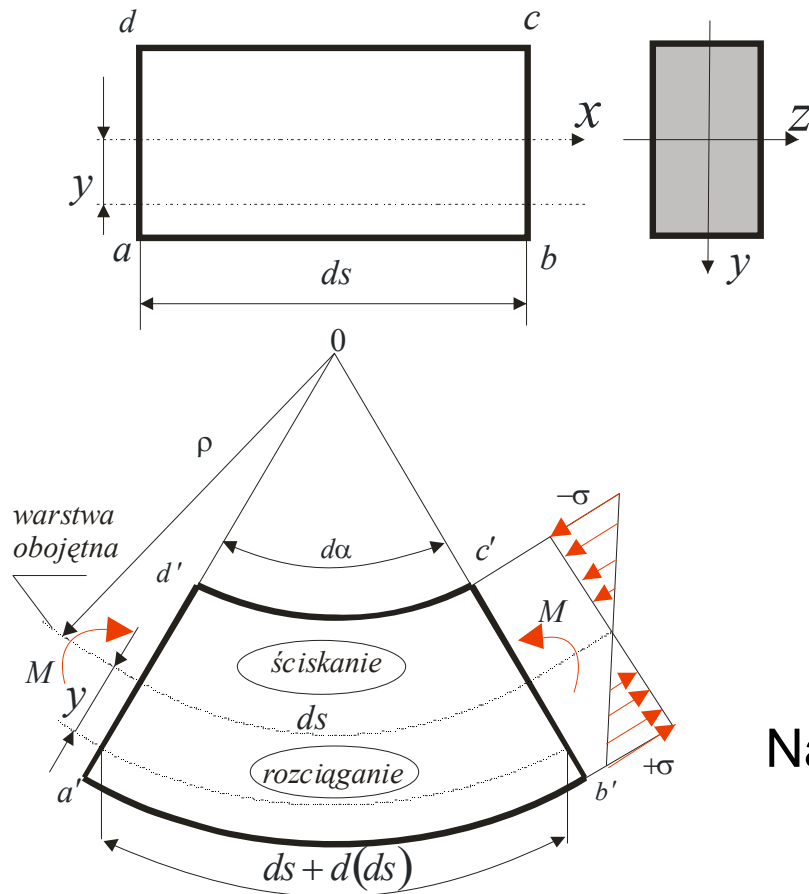
$$\sum M_o = T(x) dx + M(x) - q dx \frac{dx}{2} - (M(x) + dM(x)) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dM(x)}{dx} = T(x) \Rightarrow \frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{dT(x)}{dx} = -q(x)$$

Naprężenia i odkształcenia przy czystym zginaniu,



$$\sum P_x = \int_A \sigma_x dA = 0, \quad \sum M_z = M_0 - \int_A y \sigma_x dA = 0 \cdot$$



Zmiana długości włókna elementu:

$$ds + d(ds) = (\rho + y)d\alpha$$

Wydłużenie włókna wynosi:

$$d(ds) = (ds + d(ds)) - ds = (\rho + y)d\alpha - \rho d\alpha = yd\alpha$$

Wydłużenie względne:

$$\varepsilon = \frac{d(ds)}{ds} = \frac{yd\alpha}{\rho d\alpha} = \frac{y}{\rho}$$

Naprężenie określa prawo Hooke'a:

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{y}{\rho} E$$

Moment zginający w przekroju belki jest równy:

$$M_0 = M_g = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_z$$

Wzór na krzywiznę zgiętej osi belki:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_g}{EI_z}$$

i naprężenie:

$$\sigma = \frac{M_g}{I_z} y$$

Wzór powyższy określa naprężenie w przekroju belki w odległości y od osi obojętnej w zależności od zadanego obciążenia M_g i momentu bezwładności I_z przekroju poprzecznego belki.

Wskaźnik wytrzymałości na zginanie :

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} , \quad \sigma_{\max} = \frac{M_g}{W_z} \leq k_g .$$

Wskaźniki wytrzymałościowe dla różnych przekrojów:

- koła:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}$$

- pierścienia:

$$W_z = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D}$$

- prostokąta :

$$W_z = \frac{bh^2}{6}$$

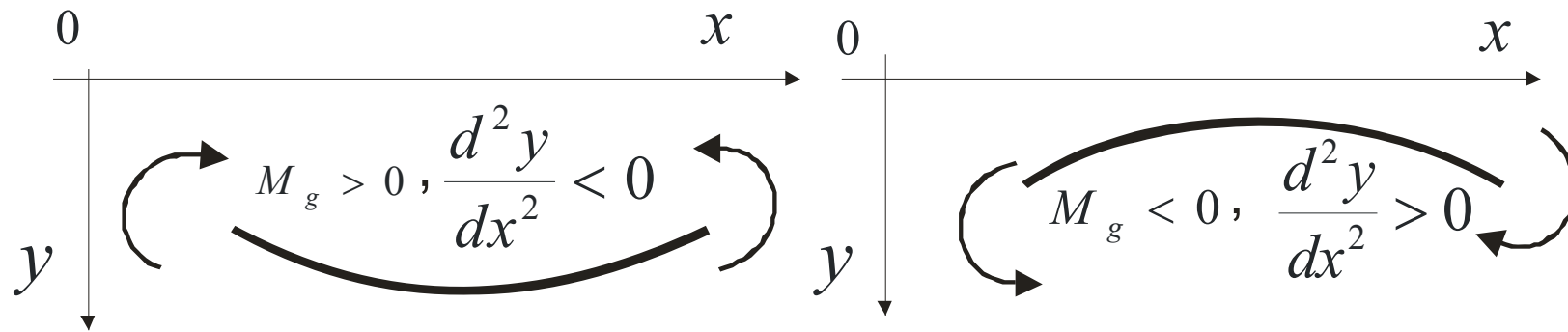
Linia ugięcia belki

Wielkość krzywizny określa się w geometrii różniczkowej równaniem:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx \pm \frac{d^2 y}{dx^2}$$

Różniczkowe równanie uproszczone linii ugięcia ma postać:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M_g}{EI_z},$$



Dodatnim wartościom momentu zginającego odpowiadają wartość ujemna drugiej pochodnej linii ugięcia

Druga pochodna linii ugięcia:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_g}{EI_z}$$

*Środek krzywizny jest umieszczony
w kierunku dodatnich y*

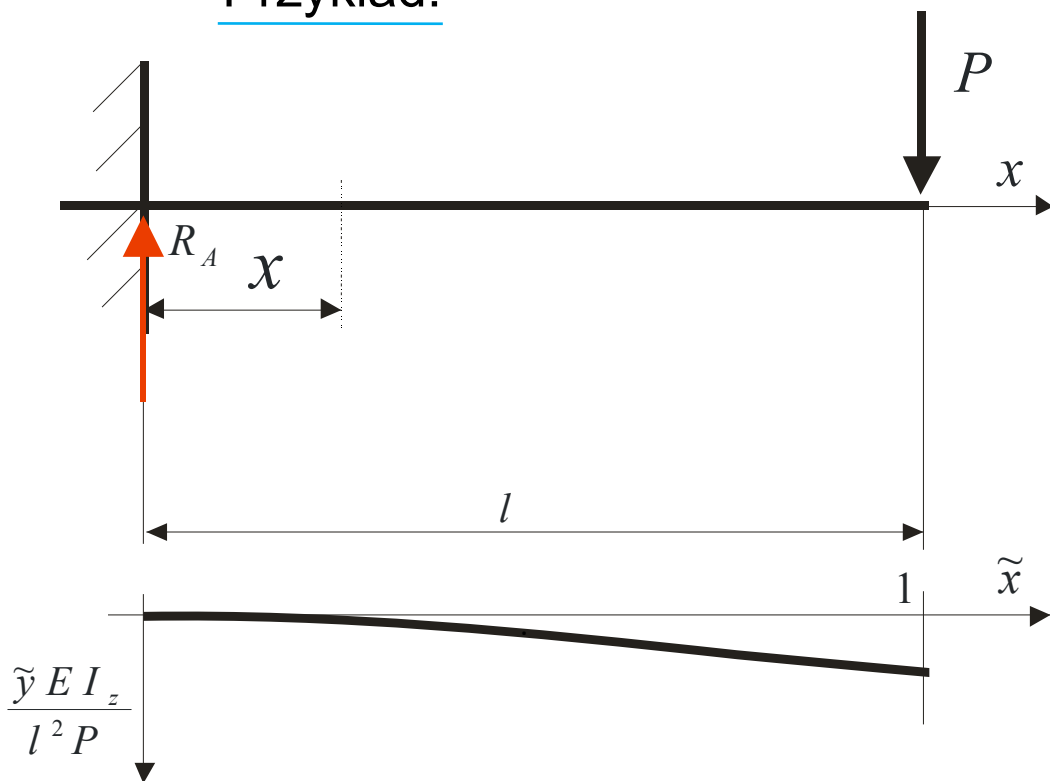
Dwukrotne scałkowanie powyższego równania przyjmuje postacie:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI_z} \int M_g dx + C_1$$

$$y = \frac{1}{EI_z} \int \left[\int M_g dx \right] dx + C_1 x + C_2$$

Stałe całkowania wylicza się z warunków brzegowych (zgodności) .

Przykład:



$$M_g = R_A x = Px$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_g}{EI_z}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI_z} \int Pxdx + C_1 = -\frac{Px^2}{2EI_z} + C_1$$

$$y = \frac{Px^3}{6EI_z} + C_1 x + C_2$$

- wielkości bezwymiarowe:

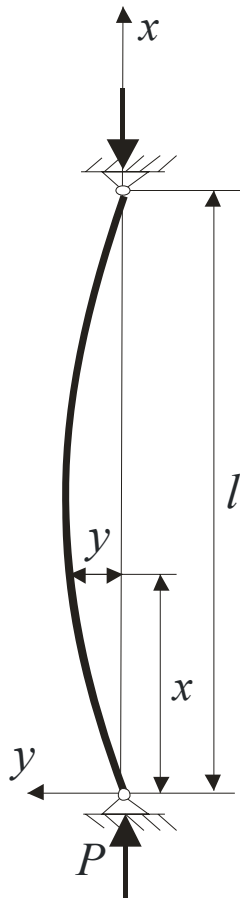
$$\tilde{y} = y/l, \quad \tilde{x} = x/l$$

Korzystając z warunków brzegowych otrzymujemy stałe: $C_1 = 0, C_2 = 0$

Linia ugięcia belki w bezwymiarowej postaci ma postać: $\tilde{y}EI_z/l^2P = \tilde{x}^3/6$

XI. WYBOCZENIE PRĘTÓW.

Wzór Eulera



$$M(x) = -P_{kr} y$$

Zależność krzywizny osi pręta od momentu zginającego:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}$$

krzywiznę osi pręta określa równanie:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{d^2 y / dx^2}{\sqrt{[1 + (dy/dx)^2]^3}}$$

Przybliżone równanie osi pręta:

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P_{kr} y}{EI}$$

Równanie różniczkowe

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0$$

gdzie $k = \sqrt{\frac{P_{kr}}{EI}}$

będzie rozwiązane przy warunkach brzegowych:

$$1^0 \text{ dla } x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$2^0 \text{ dla } x = l \Rightarrow y = 0$$

Rozwiązanie równania różniczkowego

$$y = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

$$1^0 \Rightarrow C_2 = 0 \qquad P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$$

$$2^0 \Rightarrow kl = n \cdot \pi \quad - \text{nietrywialne rozwiązanie}$$

$$\text{dla } n = 1 \qquad y = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right)$$

Wzór Eulera na siłę krytyczną

$$P_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EI_{\min}}{l^2}$$

Naprężenie w prętach wybaczanych

Naprężenie krytyczne

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A}$$

sprawdzenie na wyboczenie (stateczność)

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq k_w \quad k_w = \sigma_{kr} / n_w$$

k_w - naprężenie dopuszczalne przy wyboczeniu

n_w - współczynnik bezpieczeństwa przy wyboczeniu

Ramię bezwładności i smukłość pręta określają równania:

$$I = A i^2 \Rightarrow i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad \text{i} \quad s = \frac{l}{i}$$

a naprężenia krytyczne zależność

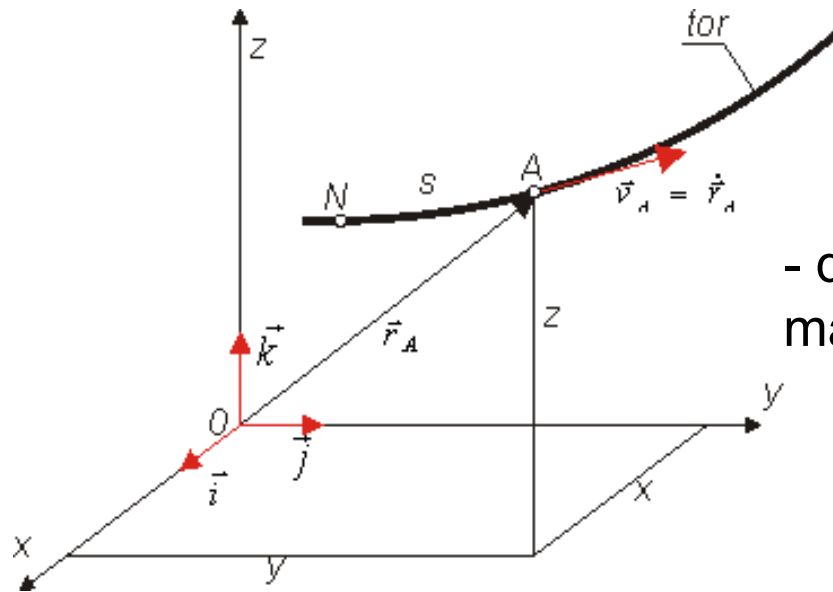
$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E i^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{s^2} .$$

XII. ELEMENTY KINEMATYKI.

ZARYS KINEMATYKI PUNKTU MATERIALNEGO.

Przedmiotem kinematyki jest geometria ruchu (sam ruch bez analizy przyczyn jego powstania) punktu materialnego i układu punktów materialnych.

Położenie punktu materialnego



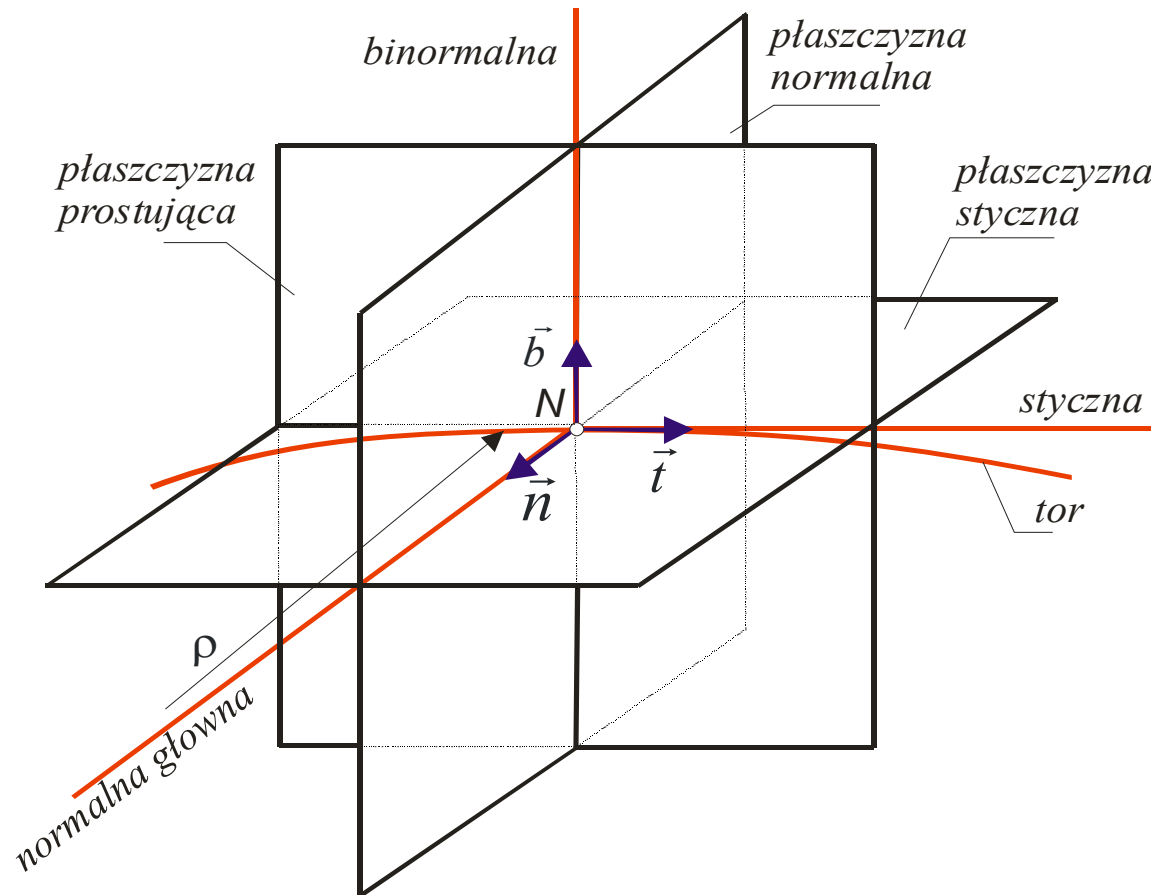
- droga i wektor położenia punktu materialnego:

$$s = s(t); \quad \vec{r} = \vec{r}(t)$$

- prędkość i przyspieszenie punktu materialnego:

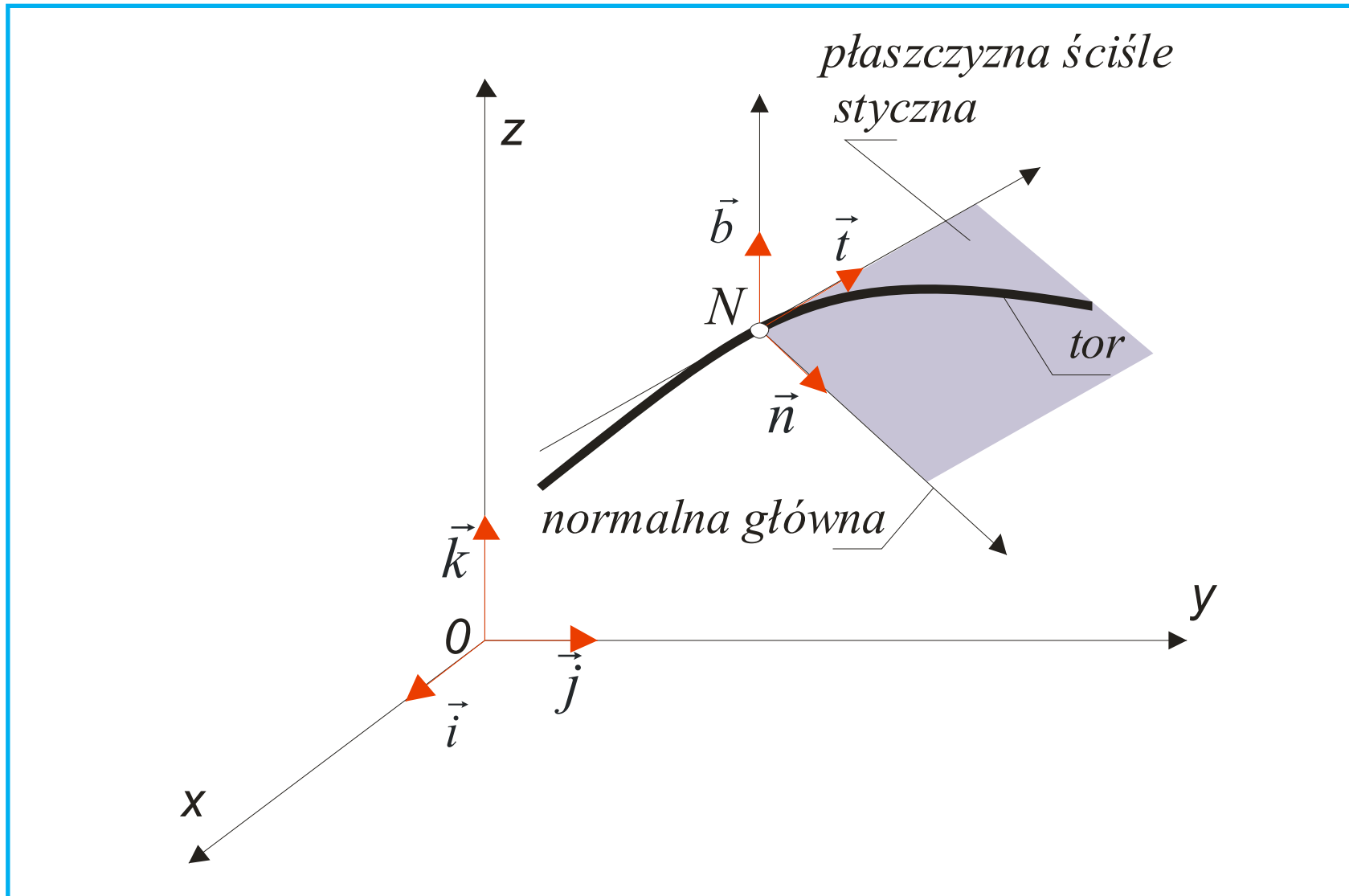
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$$
$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} = \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y} + \vec{k}\ddot{z} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z$$

Płaszczyzna ściśle styczna



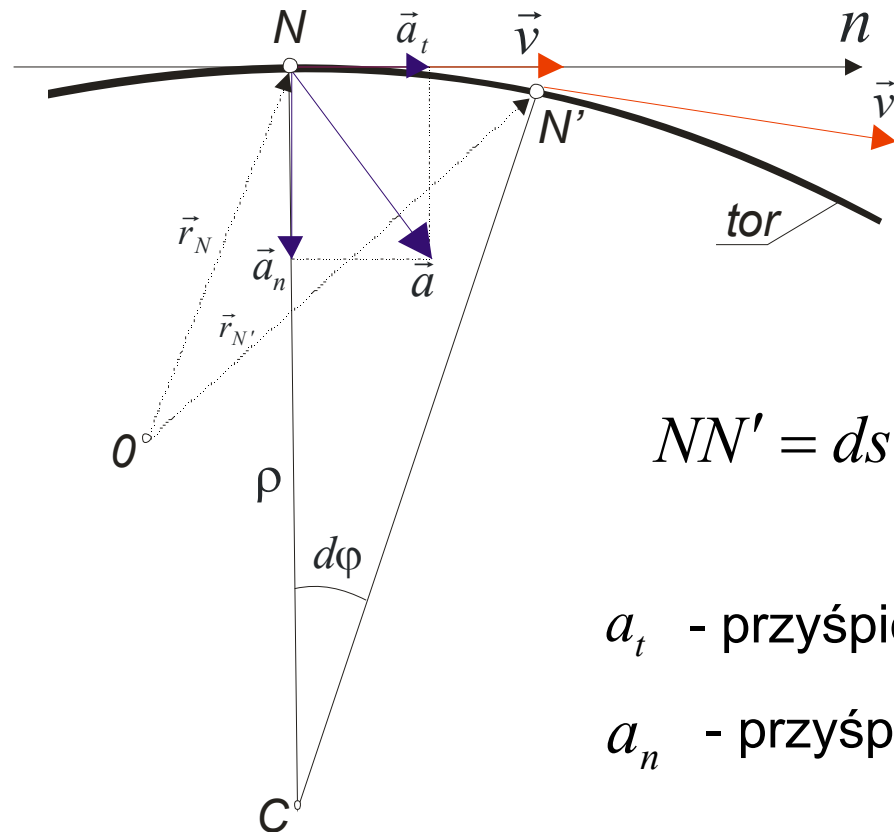
Płaszczyzna najbardziej „dopasowana” do rozpatrywanego toru punktu materialnego.

Układ naturalny



Przyśpieszenie normalne i styczne

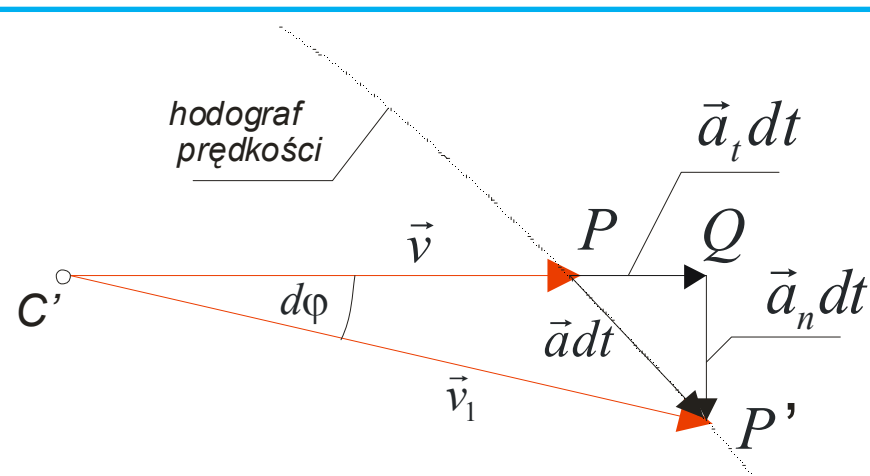
ruch punktu N w płaszczyźnie ściśle stycznej



$$NN' = ds = \rho d\varphi$$

a_t - przyśpieszenie styczne,

a_n - przyśpieszenie normalne



Z analizy hodografu prędkości wynika:

$$PQ = a_t dt, \quad QP' = a_n dt, \quad PQ = dv, \\ QP' = C'P' \sin d\varphi = C'P' d\varphi = v d\varphi \\ = v \frac{ds}{\rho},$$

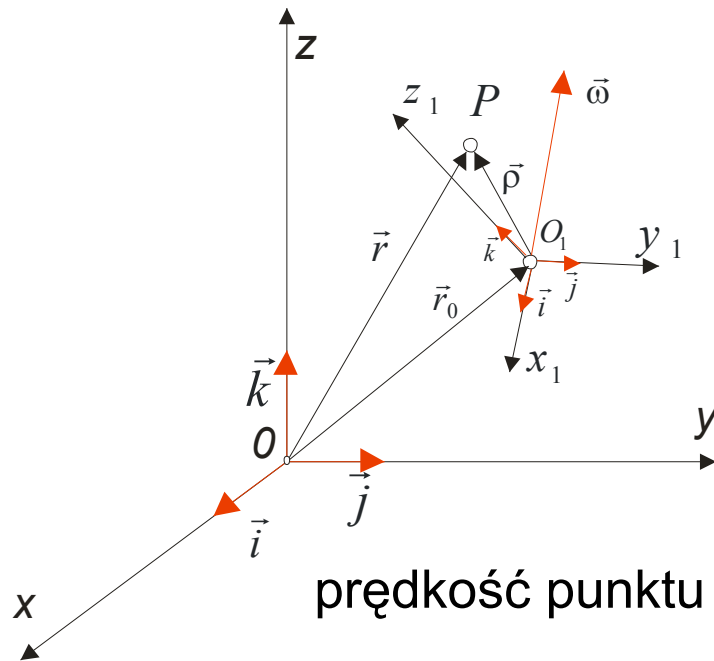
$$a_t dt = dv \Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = \dot{v}, \quad a_n dt = v \frac{ds}{\rho} \Rightarrow a_n = \frac{v}{\rho} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} v = \frac{v^2}{\rho},$$

Przyśpieszenie punktu N jest równe:

$$\vec{a} = \vec{t} a_t + \vec{n} a_n = \vec{t} \dot{v} + \vec{n} \frac{v^2}{\rho}$$

Ruch złożony punktu.

Przyśpieszenie punktu w ruchu złożonym



ruch bezwzględny punktu P :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho} = \vec{r}_0 + \vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1$$

prędkość punktu P :

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{i}}x_1 + \dot{\vec{j}}y_1 + \dot{\vec{k}}z_1 + \vec{i}\dot{x}_1 + \vec{j}\dot{y}_1 + \vec{k}\dot{z}_1 \\ &= \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{i}x_1 + \vec{\omega} \times \vec{j}y_1 + \vec{\omega} \times \vec{k}z_1 + \vec{w} \\ &= \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \times (\vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1) + \vec{w} \\ &= \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{w} = \vec{u} + \vec{w}, \end{aligned}$$

Wektory jednostkowe obracają się

Przyśpieszenie:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_{0_1} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} + \dot{\vec{w}}$$

przyśpieszenie styczne:

$$\vec{a}_{t0_1} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\rho} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}$$

$$\vec{\omega} \times \dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \times \frac{d}{dt} (\vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1)$$

$$= \vec{\omega} \times (\vec{i}\dot{x}_1 + \vec{j}\dot{y}_1 + \vec{k}\dot{z}_1) + \vec{\omega} \times (\vec{i}x_1 + \vec{j}y_1 + \vec{k}z_1)$$

$$= \vec{\omega} \times \vec{w} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{\omega} \times \vec{w} + \vec{a}_{n0_1}$$

przyśpieszenie normalne:

$$\vec{a}_{n0_1} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})$$

przyśpieszenie względne:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{w}} &= \frac{d}{dt} (\vec{i} \dot{\xi} + \vec{j} \dot{\eta} + \vec{k} \dot{\zeta}) \\ &= \vec{\omega} \times \vec{w} + (\vec{i} \ddot{\xi} + \vec{j} \ddot{\eta} + \vec{k} \ddot{\zeta}) \\ &= \vec{\omega} \times \vec{w} + \vec{a}_w\end{aligned}$$

przyśpieszenie względne

Przyśpieszenie punktu P

$$\vec{a} = \vec{a}_u + \vec{a}_w + \vec{a}_C$$

przyśpieszenie unoszenia:

$$\vec{a}_u = \dot{\vec{v}}_{0_1} + \vec{a}_{t0_1} + \vec{a}_{n0_1}$$

przyśpieszenie względne:

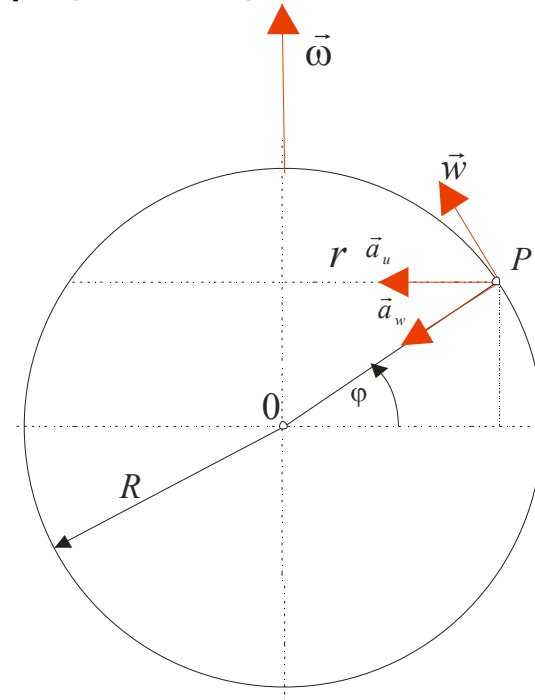
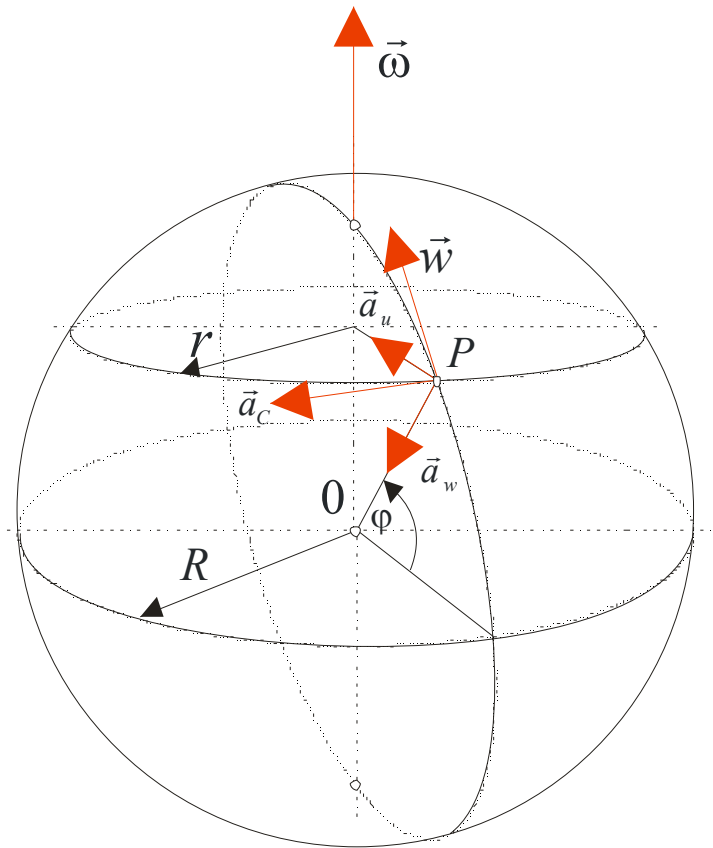
$$\vec{a}_w$$

przyśpieszenie Coriolisa:

$$\vec{a}_C = 2(\vec{\omega} \times \vec{w})$$

Przykłady z ruchu złożonego:

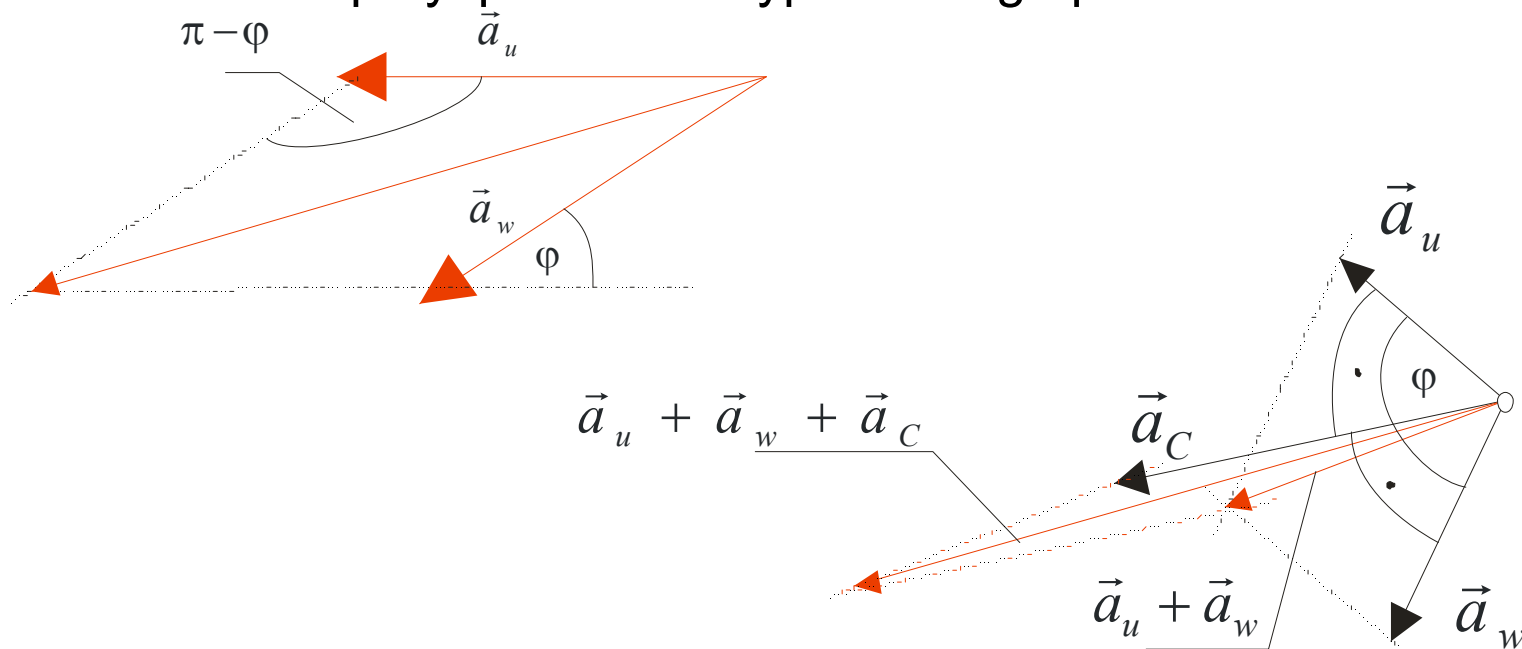
Wzdłuż południka kuli, obracającej się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ porusza się punkt materialny P ze stałą prędkością \vec{w} .



$$a_w = w^2/R, \quad a_u = \omega^2 R \cos \varphi,$$

$$a_c = 2w\omega \sin \varphi$$

Obliczenie przyspieszenia wypadkowego punktu P :

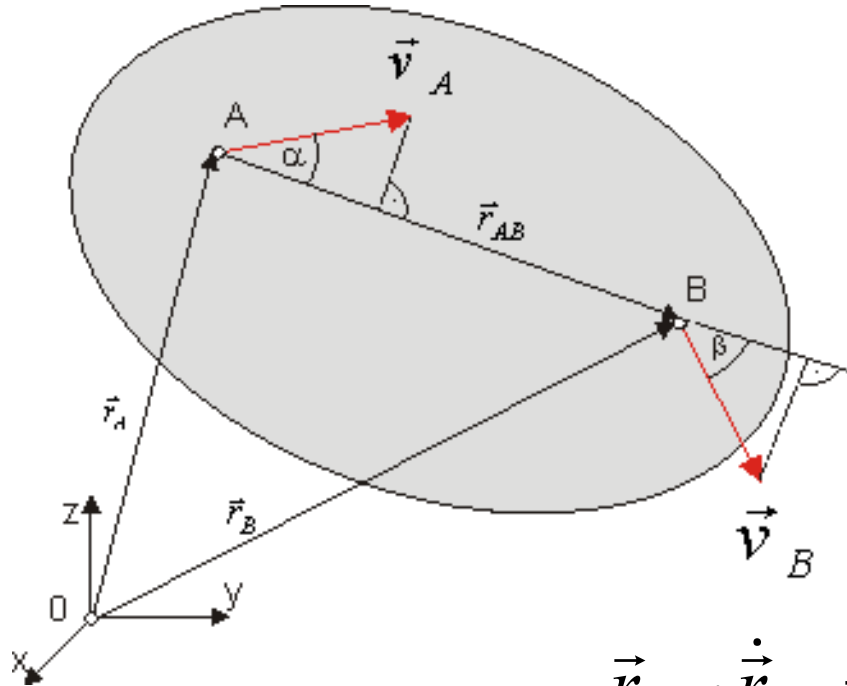


$$|\vec{a}_u + \vec{a}_w + \vec{a}_c| = \sqrt{(\omega^2 R \cos \varphi)^2 + \left(\frac{w^2}{R}\right)^2 - 2(\omega^2 R \cos \varphi) \left(\frac{w^2}{R}\right) \cos \varphi + (2\omega w)^2}$$

$$= \sqrt{\omega^4 R^2 \cos^2 \varphi + \frac{w^4}{R^2} + 2\omega^2 w^2 (1 + \sin^2 \varphi)}$$

Kinematyka ciała sztywnego

Prędkości punktów ciała sztywnego są ze sobą związane.



$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

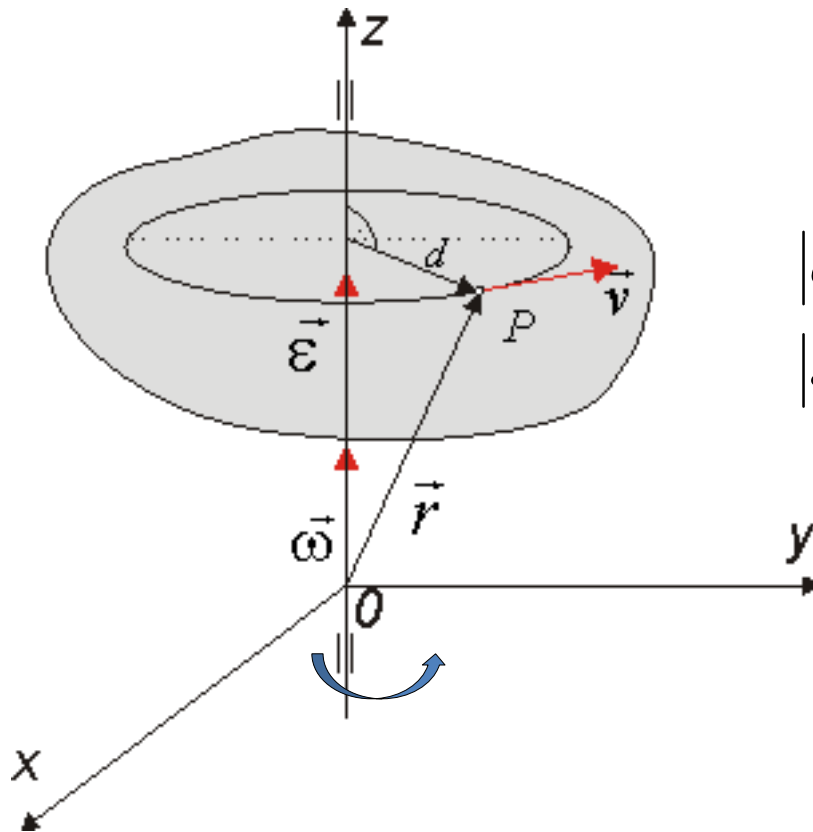
$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_{AB})^2 = 2\vec{r}_{AB} \cdot \dot{\vec{r}}_{AB} = 0$$

$$\vec{r}_{AB} \cdot \dot{\vec{r}}_{AB} = 0 \Rightarrow \vec{r}_{AB} \cdot \vec{v}_A = \vec{r}_{AB} \cdot \vec{v}_B$$

$$\Rightarrow r_{AB} v_A \cos \alpha = r_{AB} v_B \cos \beta \Rightarrow \underline{v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta}$$

Ruch obrotowy ciała sztywnego

Ciało sztywne w ruchu obrotowym ma jeden stopień swobody.

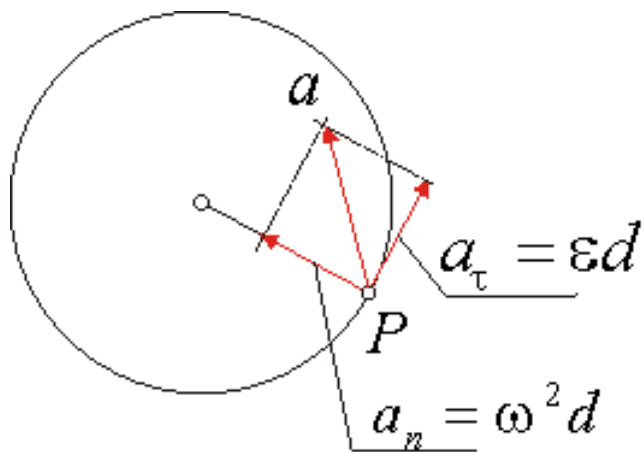


$\varphi = \varphi(t)$ - kąt obrotu

$|\vec{\omega}| = \omega = \dot{\varphi}$ - prędkość kątowna

$|\vec{\varepsilon}| = \varepsilon = \ddot{\varphi}$ - przyspieszenie kątowe

Prędkość i przyspieszenie w ruchu obrotowym

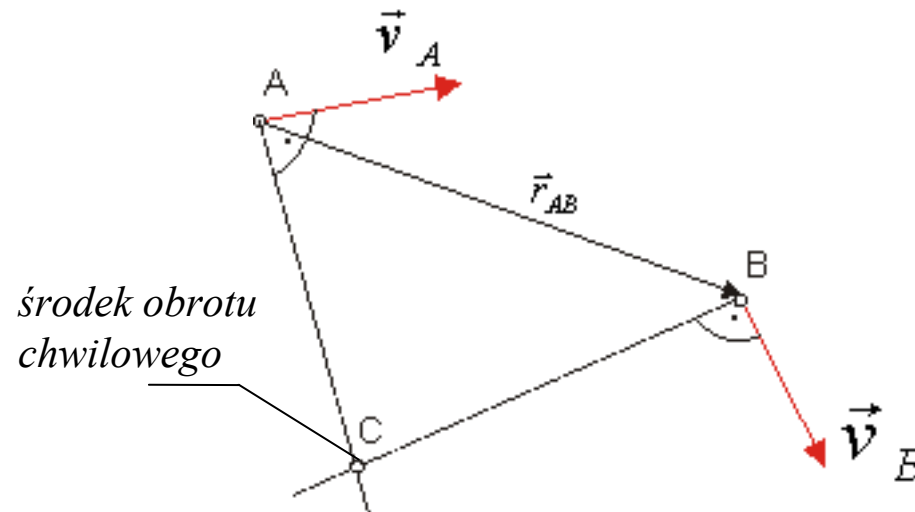


$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \dot{\phi} \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\vec{i}y\dot{\phi} + \vec{j}x\dot{\phi}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$$

Ruch płaski ciała sztywnego

W ruchu płaskim punkty ciała poruszają się w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny kierującej.



Chwilowa prędkość kątowa odcinka AB :

$$\omega_C = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC}$$

Prędkość i przyspieszenie w ruchu płaskim.

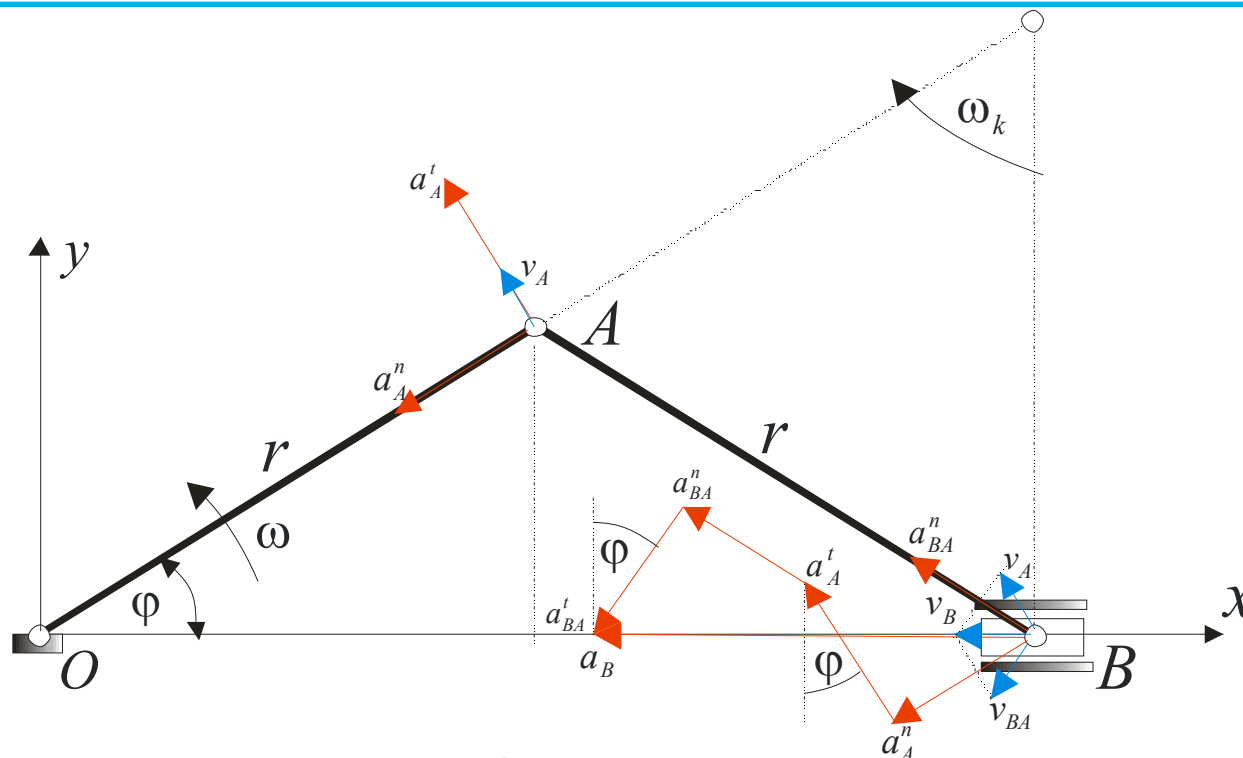
prędkość punktu B :

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB} = \vec{v}_A + \underline{\vec{\omega} \times \vec{r}}$$

przyspieszenie punktu B :

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \omega^2 = \underline{\vec{a}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \vec{r} \omega^2} \end{aligned}$$

Przykład ruchu płaskiego (mechanizm korbowy):



Rozwiązanie analityczne:

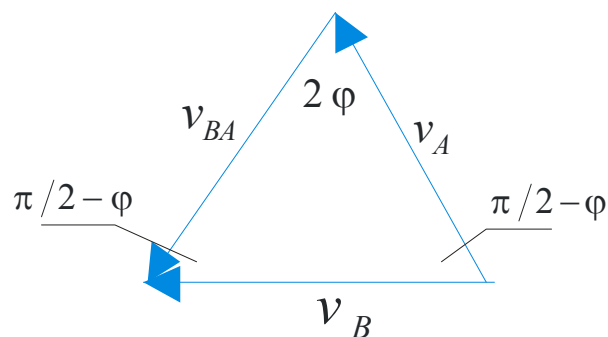
$$x_B = 2r \cos \varphi \Rightarrow v_B = dx_B / dt = -2r \sin \varphi \cdot d\varphi / dt = -2r\omega \sin \varphi \Rightarrow$$

$$a_B = dv_B / dt = -2r(\omega^2 \cos \varphi + d\omega / dt \cdot \sin \varphi) = -2r(\omega^2 \cos \varphi + \varepsilon \sin \varphi)$$

Wyznaczenie prędkości kątovej korbowodu:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA} = \vec{v}_A + \vec{\omega}_k \times \vec{r}_{AB},$$

$$v_{BA} = \omega_k r, \text{ bo } \vec{\omega}_k \perp \vec{r}_{AB},$$



trójkąt prędkości

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta prędkości wynika:

$$\frac{v_B}{\sin 2\varphi} = \frac{v_A}{\sin(\pi/2 - \varphi)} = \frac{v_{BA}}{\sin(\pi/2 - \varphi)} \Rightarrow$$

$$v_B = v_A \frac{\sin 2\varphi}{\cos \varphi} = 2v_A \sin \varphi = 2\omega r \sin \varphi,$$

$$v_{BA} = v_A = \omega r \Rightarrow \underline{\omega = \omega_k}$$

Przyśpieszenie punktu B mechanizmu korbowego:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA},$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^t, a_A^n = \omega^2 r, a_A^t = \varepsilon r,$$

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^t, a_{BA}^n = \omega_k^2 r, a_{BA}^t = \varepsilon_k r.$$

Składowa styczna przyśpieszenia względnego jest nieznana, znany jest natomiast kierunek przyśpieszenia punktu B . Wykorzystując te informacje i rzutując składowe przyśpieszenia na kierunek y i x mamy:

$$a_{BA}^t \cos \varphi = a_{BA}^n \sin \varphi + a_A^t \cos \varphi - a_A^n \sin \varphi$$

$$= \omega^2 r \sin \varphi + \varepsilon r \cos \varphi - \omega^2 r \sin \varphi = \varepsilon r \cos \varphi,$$

$$a_B = -a_{BA}^t \sin \varphi - a_{BA}^n \cos \varphi - a_A^t \sin \varphi - a_A^n \cos \varphi$$

$$= -\varepsilon r \sin \varphi - \omega^2 r \cos \varphi - \varepsilon r \sin \varphi - \omega^2 r \cos \varphi$$

$$= -2 r (\varepsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi).$$

XIII. DYNAMIKA PUNKTU.

Równanie różniczkowe ruchu punktu materialnego

Ruch punktu materialnego opisuje równanie Newtona:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{P}(\dot{\vec{r}}, \vec{r}, t)$$

przy danych warunkach początkowych:

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0, \quad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{v}_0.$$

Zadania główne z dynamiki punktu materialnego można podzielić na dwa rodzaje:

1. Zadania proste sprowadzają się do wyznaczenia siły, wywołującej ruch punktu materialnego, na podstawie równania ruchu.
2. Zadania odwrotne sprowadza się do wyznaczenia równania ruchu, jeżeli znamy masę punktu i siłę

Szczególne przypadki ruchu, w zależności od siły \vec{P} wywołującej ruch:

1. Siła jest stała:

$$\vec{P} = const$$

2. Siła zależy od czasu:

$$\vec{P} = \vec{P}(t)$$

3. Siła zależy od prędkości:

$$\vec{P} = \vec{P}(\dot{\vec{r}})$$

4. Siła zależy od położenia:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{r})$$

Twierdzenie o pędzie i popędzie

Ogólny zapis drugiej zasady Newtona:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{P}$$

Zmiana pędu ciała jest równa popędowi przekazywanemu temu ciału.

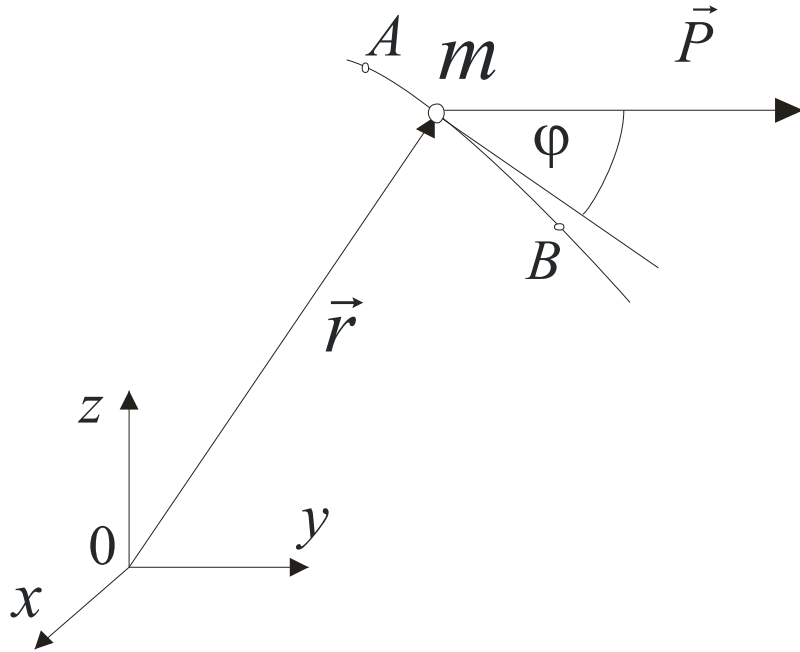
$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = const$$

Jeżeli na układ ciał nie działają siły zewnętrzne to suma pędów tych ciał jest stała.

XIII. ZASAD RÓWNOWAŻNOŚCI ENERGII KINETYCZNEJ I PRACY.

Praca i pole sił

Praca mechaniczna jest iloczynem skalarnym siły i przesunięcia.



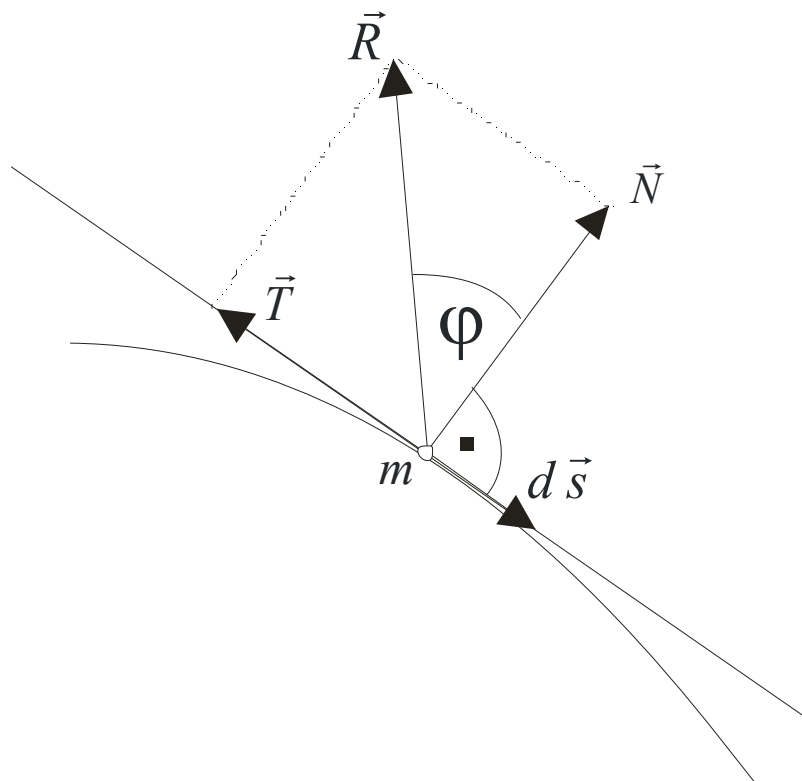
$$dL = \vec{P} d\vec{r} = (P \cos \varphi) dr \\ = P(dr \cos \varphi)$$

$$L = \int_{AB} dL \\ = \int_{AB} (Xdx + Ydy + Zdz)$$

W potencjalnym polu sił praca jest równa różnicy potencjałów.

$$\underline{L_{AB} = m(V_A - V_B); \quad V = -L/m}$$

W przypadku obecności więzów praca jest równa:



$$dL = \vec{R}d\vec{s} = Rds \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -Rds \sin \varphi = -Tds$$

Pochodna pracy, **moc** (siły) określona jest wzorem:

$$N = \frac{dL}{dt} = \frac{1}{dt} (\vec{P} d\vec{r}) = \vec{P}\vec{v},$$

gdy siła \vec{P} jest stała.

Zasada równoważności energii kinetycznej i pracy.

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} \Rightarrow m \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} \vec{v} \Rightarrow m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \vec{v} \right) = \vec{P} \frac{d\vec{r}}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \vec{P} \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) dt = \int_{AB} \vec{P} d\vec{r}.$$

Po scałkowaniu otrzymano:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{AB} \vec{P} d\vec{r}, \text{ gdzie } E = \frac{mv^2}{2} \text{ wyraża energię kinetyczną.}$$

Zasada równoważności energii kinetycznej i pracy:

$$E_2 - E_1 = L$$

Zasada zachowania energii mechanicznej

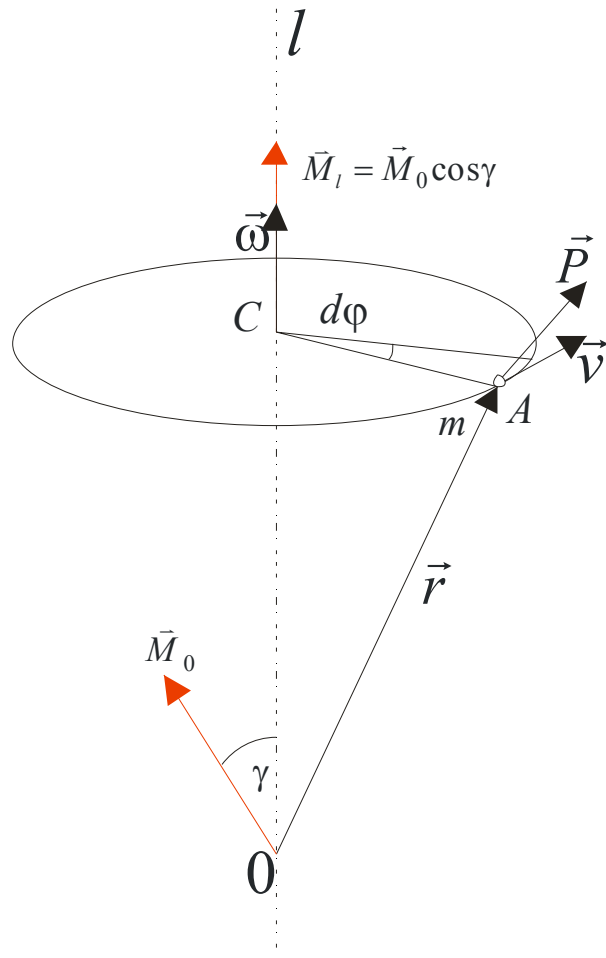
$$E_2 - E_1 = V_1 - V_2$$

$$\Rightarrow E_1 + V_1 = E_2 + V_2$$

$$\Rightarrow \underline{E + V = const.}$$

W potencjalnym polu sił suma energii kinetycznej i potencjalnej (*energia mechaniczna*) punktu materialnego jest stała.

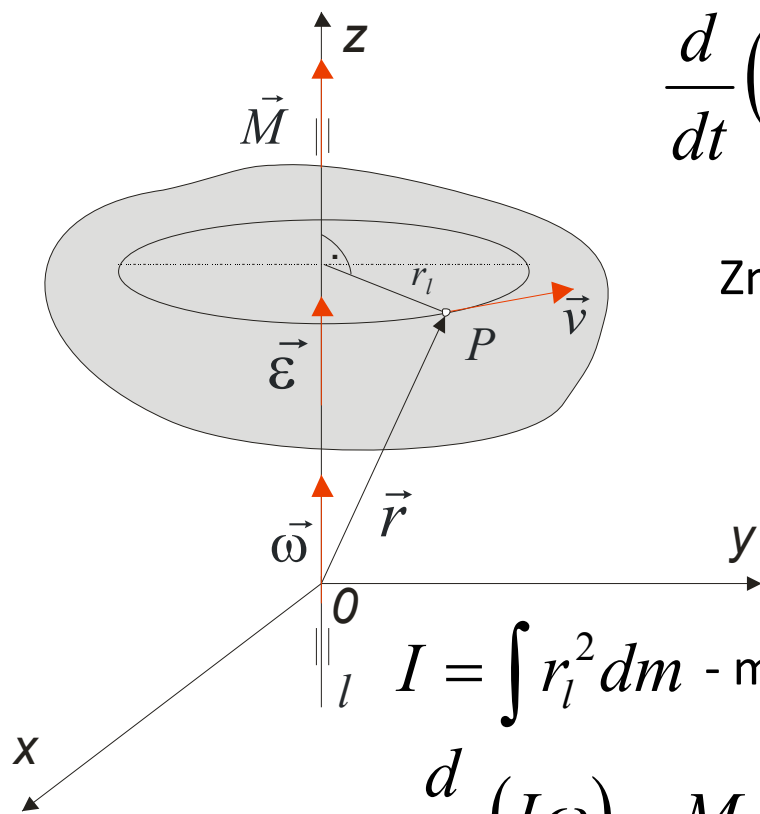
Praca i moc w ruchu obrotowym



$$\begin{aligned}
 N &= \frac{dL}{dt} = \frac{1}{dt} (\vec{P} d\vec{r}) = \vec{P} \vec{v} \\
 &= \vec{P} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{P}) \\
 &= \vec{\omega} \cdot \vec{M}_0 = \vec{M}_0 \vec{\omega} \cos \gamma = M_l \omega
 \end{aligned}$$

XIV. DYNAMIKA BRYŁY SZTYWNEJ.

Ruch obrotowy bryły dookoła osi stałej



Zmianę pędu punktu P opisuje równanie:

$$\frac{d}{dt} (m_P r_l^2 \omega) = M_P, \quad v = \omega r_l,$$

Zmianę pędu całej bryły:

$$\frac{d}{dt} \left(\omega \int r_l^2 dm \right) = M,$$

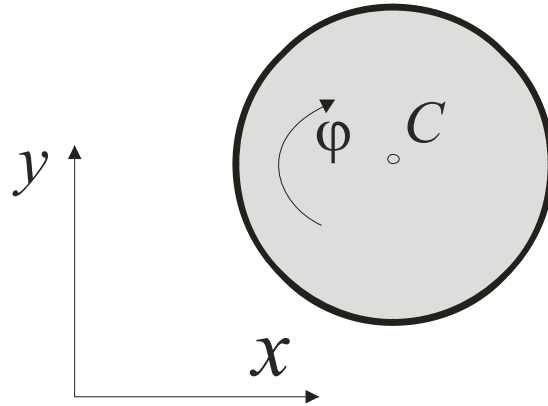
$I = \int r_l^2 dm$ - masowy moment bezwładności bryły

$$\frac{d}{dt} (I\omega) = M,$$

$$I \varepsilon = M$$

Ruch płaski ciała sztywnego

Ruch płaski ciała sztywnego opisują równania:



$$m\ddot{x}_C = P_{Cx}$$

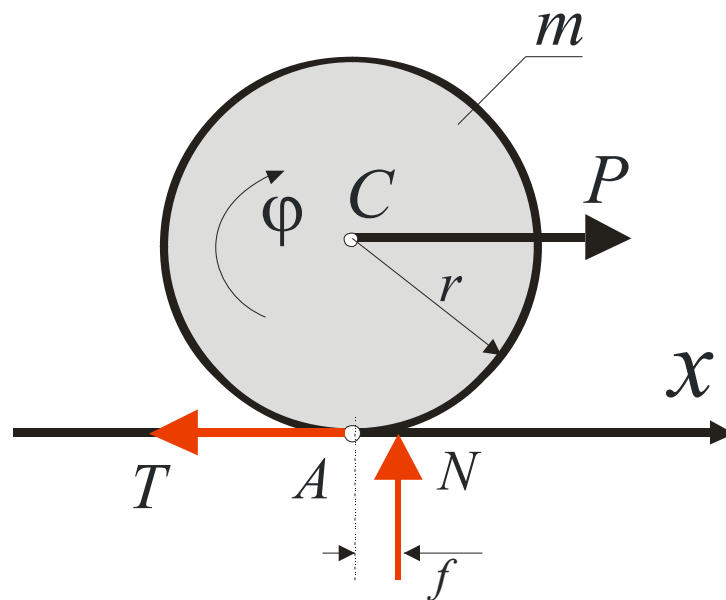
$$m\ddot{y}_C = P_{Cy}$$

$$I_C\ddot{\phi} = M_C$$

Energia kinetyczna ciała (*suma energii kinetycznej ruchu postępowego środka masy i energii kinetycznej ruchu obrotowego dookoła osi przechodzącej przez środek masy*):

$$E_k = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

Przykład: koło o masie m i promieniu r toczy się bez poślizgu po poziomej płaszczyźnie pod wpływem siły P :



Równania ruchu:

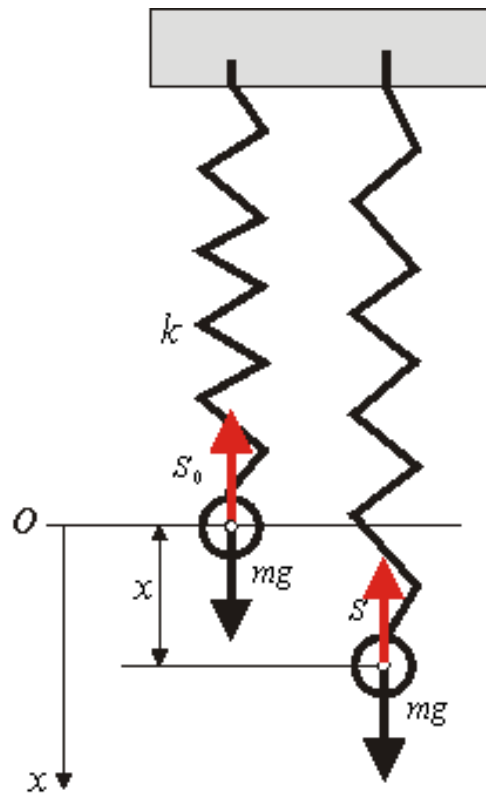
$$m\ddot{x}_C = P - T$$

$$0 = mg - N$$

$$I_C\ddot{\varphi} = Tr - Nf$$

gdzie : $I_C = \frac{1}{2}mr^2$, $r\ddot{\varphi} = \ddot{x}_C$, $\ddot{x}_C = a$

XV. DRGANIA PUNKTU MATERIALNEGO.



$S_0 = k \cdot \lambda_{st}$ - reakcja statyczna sprężyny

$$k \cdot \lambda_{st} = mg \Rightarrow \lambda_{st} = \frac{mg}{k}$$

Drgania swobodne:

$$m \ddot{x} = mg - S, \quad S = k \cdot (x + \lambda_{st})$$

$$m \ddot{x} = mg - k(x + \lambda_{st}) = kx,$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$$

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$C_1 = A \cos \varphi_0, \quad C_2 = A \sin \varphi_0, \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{C_2}{C_1}$$

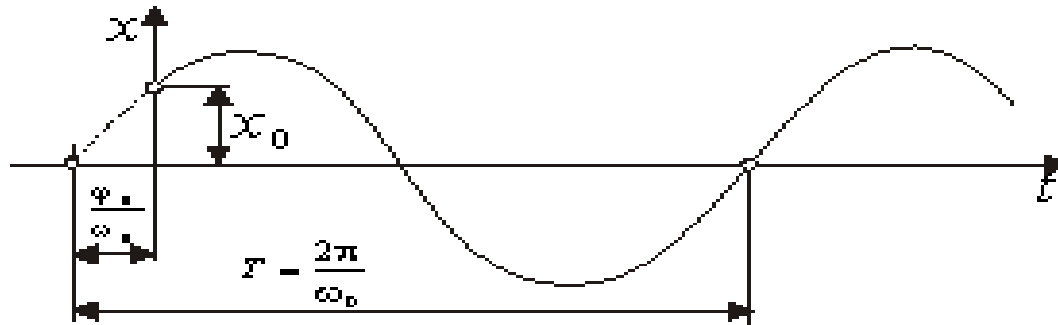
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{st}}{g}}$$

Warunki początkowe:

$$t = 0 \Rightarrow x_0 \text{ i } \dot{x}_0$$

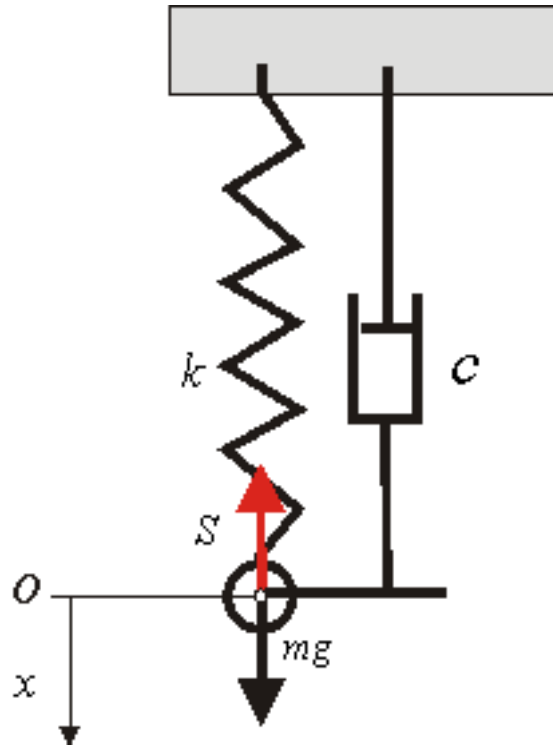
$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad C_1 = x_0, \quad C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}$$

$$\dot{x} = -C_1 \omega_0 \sin \omega_0 t + C_2 \omega_0 \cos \omega_0 t$$



Przebieg drgań

Drgania swobodne tłumione



$$\underline{m\ddot{x} = -kx - c\dot{x},}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2n = \frac{c}{m},$$

$$\underline{\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$x = e^{rt}$$

$$e^{rt} (r^2 + 2nr + \omega_0^2) = 0$$

równanie charakterystyczne:

$$r^2 + 2nr + \omega_0^2 = 0$$

$$r_{1,2} = -n \pm i\sqrt{\omega_0^2 - n^2}$$

1. Tłumienie nadkrytyczne $n > \omega_0$

$$x = C_1 \exp\left[-\left(n + \sqrt{n^2 - \omega_0^2}\right) t\right] + C_2 \exp\left[-\left(n - \sqrt{n^2 - \omega_0^2}\right) t\right]$$

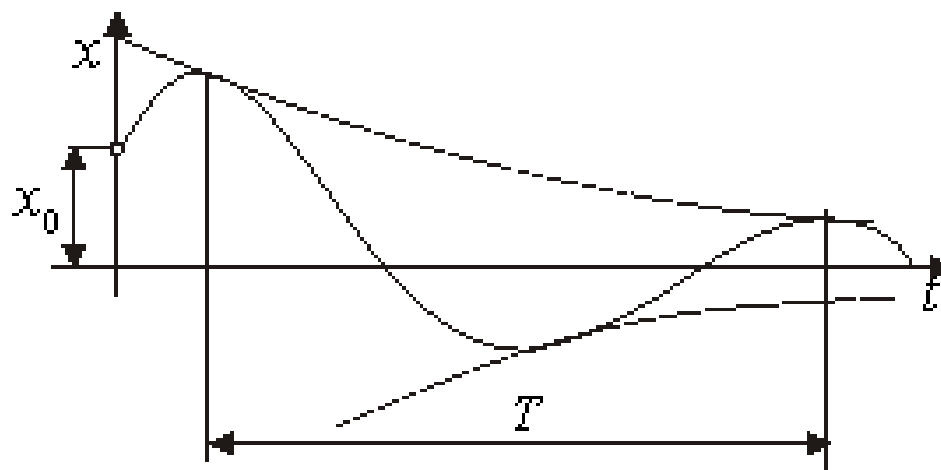
2. Tłumienie krytyczne $n = \omega_0$

$$x = C \cdot \exp(-\omega_0 t)$$

3. Tłumienie podkrytyczne $n < \omega_0$

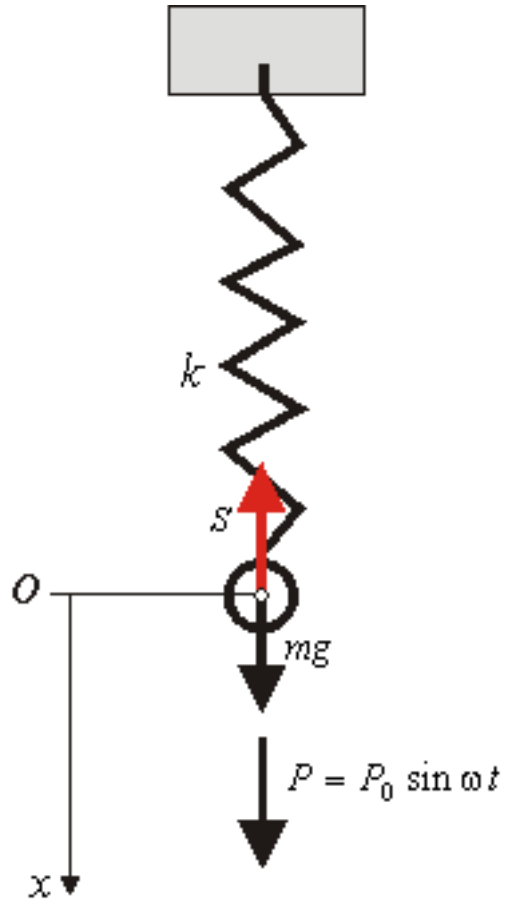
$$x = A_0 \cdot \exp(-\omega_0 t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - n^2} \quad - \text{częstość drgań tłumionych}$$



Drgania swobodne tłumione

Drgania wymuszone



$$m\ddot{x} = mg - S + P_0 \sin \omega t,$$

$$m\ddot{x} = mg - k(x + \lambda_{st}) + P_0 \sin \omega t = kx + P_0 \sin \omega t,$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{P_0}{m} \sin \omega t$$

$$x = x_1 + x_2$$

$$x_1 = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t \quad x_2 = A \sin \omega t$$

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{P_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t$$

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{P_0 \omega}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t + \frac{P_0 \omega}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t$$