Filtracja

Krzysztof Patan

Wprowadzenie

- Działanie systemu polega na przetwarzaniu sygnału wejściowego $x(t)$ na sygnał wyjściowy $y(t)$
- Równoważnie, system przetwarza widmo sygnału wejściowego $X(j\omega)$ na widmo sygnału wyjściowego $Y(j\omega)$

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

czyli

$$|Y(j\omega)|e^{j\varphi_Y} = H|(j\omega)|e^{j\varphi_H}|X(j\omega)|e^{j\varphi_X} \tag{1}$$

- Równanie (1) dzieli się na dwie zależności
  1. relacja modułów
  $$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)|$$
  2. relacja faz
  $$\angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega)$$

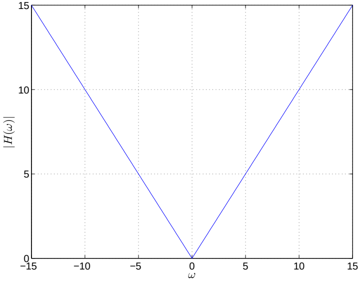
- Przekształcenie widma amplitudowego sygnału wejściowego ma charakter multiplikatywny
- Przekształcenie widma fazowego sygnału wejściowego ma charakter addytywny
- Filtracja – uzyskanie pożądanych parametrów sygnału wyjściowego w dziedzinie częstotliwości
- Układy liniowe realizujące filtrację nazywamy filtrami
- Przykładem filtru może być układ korekcyjny (korektor) występujący w sprzęcie audio; w zależności od upodobań użytkownika może on wzmacniać niskie bądź wysokie częstotliwości w sygnale wyjściowym

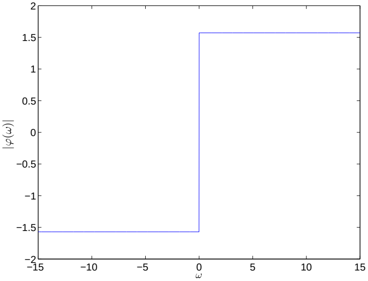
Filtr różniczkowy

- Transmitancja częstotliwościowa filtru różniczkującego

$$H(j\omega) = j\omega$$

- Charakterystyki filtru





- Zastosowanie filtru
  - odbiorniki sygnałów z modulacją częstotliwości
  - dwuwymiarowe filtry stosowane do wyostrzaniu krawędzi przedmiotów w obrazie cyfrowym

Filtry selektywne (pasmowe)

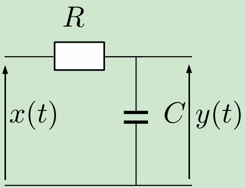
- W zależności od kształtu chrakterystyki rozróżnia się kilka typów filtrów selektywnych
- Kluczowe znaczenie ma pulsacja graniczna ω_g
- Zbiór pulsacji ω takich, że $|\omega| < \omega_g$ nazywamy pasmem przepustowym
- Zbiór pulsacji ω takich, że $|\omega| > \omega_g$ nazywamy pasmem zaporowym
- Jako pulsację graniczną przyjmuje się pulsację, przy której

$$\frac{|H(j\omega)|}{|H(j\omega)|_{\max}} = -3dB$$

- Filtr dolnoprzepustowy – dla określonej pulsacji granicznej ω_g, moduł $|H(j\omega)|$ przybiera dla pulsacji $|\omega| < \omega_g$ wartości dużo większe niż dla pulsacji $|\omega| > \omega_g$

Przykład 1

Układ RC pierwszego rzędu – przykład filtru dolnoprzepustowego, $R = 1k\Omega$, $C = 1\mu F$



$$x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

$$\downarrow$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

$$H(j\omega) = \frac{1000}{1000 + j\omega} = \frac{1000}{\sqrt{\omega^2 + 10^6}} e^{-jarctg(\omega/1000)}$$

Zakładamy że $|H(j\omega)|_{\max} = H(j0) = 1$ i $\omega_g = 1000 rad/s$

DEMO: filtr1.m

Typy filtrów

Dla systemów drugiego rzędu

- filtr dolnoprzepustowy

$$H_{LP}(j\omega) = K\frac{1}{a_0^2 - \omega^2 + ja_1\omega}$$

- filtr środkowoprzepustowy

$$H_{BP}(j\omega) = K\frac{j\omega}{a_0^2 - \omega^2 + ja_1\omega}$$

- filtr środkowozaporowy

$$H_{BS}(j\omega) = K\frac{b_0 - \omega^2}{a_0^2 - \omega^2 + ja_1\omega}$$

- filtr górnoprzepustowy

$$H_{HP}(j\omega) = K\frac{-\omega^2}{a_0^2 - \omega^2 + ja_1\omega}$$

Przykład 2

Filtr środkowoprzepustowy rzędu drugiego

$$H_{BP}(j\omega) = K \frac{j\omega}{a_0^2 - \omega^2 + ja_1\omega}$$

Załóżmy $K = 1000$, $a_0 = 100$, $a_1 = 1000$

Właściwości filtru

- $|H(j\omega)|_{max} = 1$, przy $\omega_{max} = \pm 100 rad/s$
- częstotliwości graniczne ω_1 i ω_2

$$|H(j\omega_{1,2})| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H(j\omega)|_{\max} = \frac{1}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{20}$$

przy $\omega_1 \approx 10$ i $\omega_2 \approx 10010$

DEMO: filtr2.m

Projektowanie filtrów

- Często stosowaną techniką jest transformacja częstotliwości
- Punktem wyjśćia jest filtr dolnoprzepustowy o transmitancji $H_{LP}(j\omega)$ i częstotliwości górnej pasma 3dB równej ω_g
- Stosując odpowiednie transformacje częstotliwości można z danej transmitancji $H_{LP}(j\omega)$ uzyskać transmitancje innych filtrów selektywnych
- Na bazie transmitancji filtru dolnoprzepustowego o pulsacji granicznej ω_{g1} można otrzymać transmitancję filtru dolnoprzepustowego o pulsacji ω_{g2} poprzez zamianę zmiennej ω przez

$$\omega = v\frac{\omega_{g1}}{\omega_{g2}}$$

- Na bazie transmitancji filtru dolnoprzepustowego o pulsacji granicznej ω_g można otrzymać transmitancję filtru środkowoprzepustowego o pulsacjach granicznych ω_1 i ω_2 poprzez podstawienie

$$\omega = \omega_g \frac{v^2 - \omega_1 \omega_2}{jv(\omega_2 - \omega_1)}$$

- Na bazie transmitancji filtru dolnoprzepustowego o pulsacji granicznej ω_g można otrzymać transmitancję filtru środkowozaporowego o pulsacjach granicznych ω_1 i ω_2 poprzez podstawienie

$$\omega = \omega_g \frac{v(\omega_2 - \omega_1)}{\omega_1 \omega_2 - v^2}$$

- Na bazie transmitancji filtru dolnoprzepustowego o pulsacji granicznej ω_g można otrzymać transmitancję filtru górnoprzepustowego o pulsacji granicznych ω_d poprzez podstawienie

$$\omega = -\frac{\omega_g \omega_d}{v}$$

Przykład 3

Rozpatrzmy filtr drugiego rzędu o transmitancji $H(j\omega)$ i parametrach $a_0 = 10^3$, $a_1 = \sqrt{2}a_0$ i $K = 10^6$. Na bazie tego filtru zbudować filtr dolnoprzepustowy o pulsacji dwukrotnie większej.

$$H(j\omega) = K\frac{1}{a_0^2 - \omega^2 + j\sqrt{2}a_0\omega}$$

charakterystyka amplitudowa $|H(j\omega)| = \frac{|K|}{\sqrt{a_0^4+\omega^4}}$

pulsacja graniczna $\omega_{g1} = 1000 rad/s$

stosujemy podstawienie $\omega = v\frac{\omega_{g1}}{\omega_{g2}} = \frac{v}{2}$ transmitancja nowego filtru

$$\hat{H}(jv) = K\frac{1}{a_0^2 - (\frac{v}{2})^2 + j\sqrt{2}a_0\frac{v}{2}} = \frac{4K}{4a_0^2 - v^2 + j2\sqrt{2}a_0 v}$$

DEMO: filtr3.m

Przykład 4

Rozpatrzmy filtr bazowy z przykładu 3. Na bazie tego filtru zbudować filtr górnoprzepustowy o pulsacji dolnej $\omega_d = 10 rad/s$.
Transmitancja filtru bazowego

$$H(j\omega) = K \frac{1}{a_0^2 - \omega^2 + j\sqrt{2} a_0 \omega}$$

stosujemy podstawienie

$$\omega = -\frac{\omega_g \omega_d}{v} = -\frac{10^4}{v}$$

transmitancja nowego filtru

$$\hat{H}(jv) = K \frac{1}{a_0^2 - (-\frac{10^4}{v})^2 + j\sqrt{2} a_0 (-\frac{10^4}{v})} = \frac{K v^2}{a_0^2 v^2 - 10^8 - j 10^4 \sqrt{2} a_0 v}$$

DEMO: filtr4.m

Filtry o liniowej fazie

- Filtry tego typu mają charakterystykę fazową o liniowym przebiegu
- Ważnym modelem jest filtr wszechprzepustowy – filtr, który posiada stałe wzmocnienie równe jedności
- Filtr o transmitancji

  $$H_{AP}(j\omega) = K\frac{a_0^2 - \omega^2 - j\omega a_1}{a_0^2 - \omega^2 + j\omega a_1}$$

  jest filtrem wszechprzepustowym drugiego rzędu
- Właściwości filtru wszechprzepustowego są całkowicie determinowane przez charakterystykę fazową

- Rozważmy filtr o następującej transmitancji

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

- Jest to filtr wszechprzepustowy ($|H(j\omega)| = 1$)
- Filtr posiada liniową fazę

$$\arg H(j\omega) = -\omega t_0$$

- Widmo sygnału na wyjściu filtru

$$Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$$

- Uwzględniając właściwość przesunięcia w dziedzinie czasu otrzymujemy

$$y(t) = x(t - t_0)$$

- Sygnał wyjściowy jest opóźnioną wersją sygnału wejściowego
- Przejście sygnału przez filtr wszechprzepustowy nie powoduje zniekształcenia sygnału, ale jego przesunięcie
- Gdy filtr posiada charakterystykę fazową nieliniową to wtedy różne składowe widma sygnału wejściowego będą miały różne opóźnienia
- Składowe zgodnie z zasadą superpozycji zostają dodane do siebie i pomimo stałości chrakterystyki amplitudowej kształt sygnału na wyjściu filtru może znacznie różnić się od kształtu sygnału wejściowego

Filtry idealne

- Filtry idealne są abstrakcyjnymi modelami
- Filtr idealny posiada takie charakterystyki częstotliwościowe, że dla pewnego zakresu częstotliwości składowe sygnału przechodzą przez filtr bez żadnych zniekształceń, a dla pozostałych są całkowicie tłumione
- Filtry idealne nie są realizowalne praktycznie
- **Idealny filtr dolnoprzepustowy**

$$H(j\omega) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} & \text{dla } |\omega| < \omega_g \\ 0 & \text{dla } |\omega| > \omega_g \end{cases} = \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right) e^{-j\omega t_0}$$

- **Idealny filtr górnoprzepustowy**

$$H(j\omega) = \left(1 - \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_g}\right)\right) e^{-j\omega t_0}$$

- **Idealny filtr środkowoprzepustowy**

$$H(j\omega) = \Pi\left(\frac{|\omega| - \omega_s}{W}\right) e^{-j\omega t_0}$$

gdzie

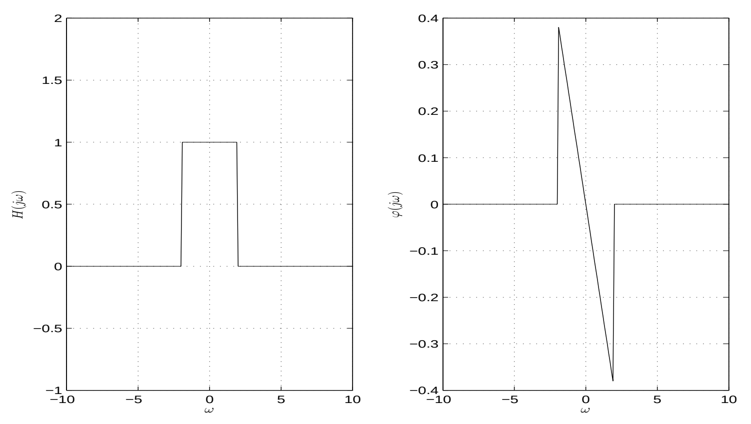
$$\omega_s = \frac{\omega_{g1} + \omega_{g2}}{2}, \quad W = \omega_{g1} - \omega_{g2}, \quad \omega_{g1} < \omega_{g2}$$

- **Idealny filtr środkowozaporowy**

$$H(j\omega) = \left(1 - \Pi\left(\frac{|\omega| - \omega_s}{W}\right)\right) e^{-j\omega t_0}$$

Przykład 5

Charakterystyki idealnego filtru dolnoprzepustowego: $\omega_g = 2$, $t_0 = 0,2$



DEMO: filtr5.m

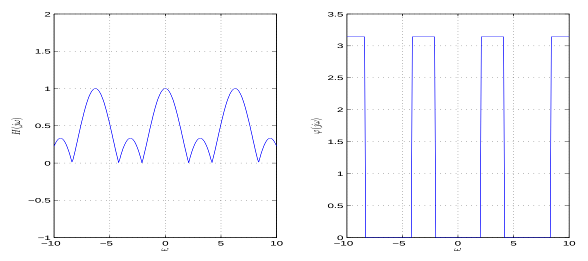
Przykład 6

System uśredniający/wygładzający

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n-1] + x[n] + x[n+1]\right)$$

Transimtancja częstotliwościowa

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{3}e^{-j\omega} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{j\omega} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos(\omega)$$



DEMO: filtr6.m

Przykład 7

Toolbox Signal Processing pakietu Matlab

- `fdatool` – narzędzie do projektowania i analizy filtrów
- `fvtool` – narzędzie do wizualizacji działania filtrów
- `filter` – projektowanie jednowymiarowego filtru cyfrowego
- `butter` – projektowanie filtrów Butterwortha
- `cheby1`, `cheby2` – projektowanie filtrów Chebyszewa
- `freqz` – odpowiedź filtru w dziedzinie częstotliwości