

Transmitancje i charakterystyki częstotliwościowe

Krzysztof Patan

Transmitancja systemu czasu ciągłego

- Przekształcenie Laplace'a systemu czasu ciągłego jest superpozycją składowych pochodzących od wymuszenia $X(s)$ i warunków początkowych
- Definiując transmitancję zakłada się, że warunki początkowe są zerowe, tzn. odpowiedź systemu jest wynikiem działania jedynie wymuszenia. Wówczas

$$Y(s) = \frac{L(s)}{M(s)} X(s)$$

współczynniki wielomianów $L(s)$ i $M(s)$ są funkcjami parametrów danego systemu

- Transmitancją $H(s)$ systemu czasu ciągłego nazywa się wielkość

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Big|_{\text{przy zerowych warunkach początkowych}}$$

Charakterystyki częstotliwościowe

- W wielu przypadkach wygodnie jest posługiwać się transmitancją systemu określoną nie na całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej s , lecz jedynie jej części odpowiadającej wartości $s = j\omega$, gdzie $\omega \in (-\infty, \infty)$

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$$

- Funkcję $H(j\omega)$ nazywa się charakterystyką częstotliwościową lub charakterystyką częstotliwościowo-fazową systemu
- Funkcję $H(j\omega)$ można reprezentować w postaci algebraicznej jako część rzeczywistą i zespoloną lub w postaci wykładniczej jako moduł i fazę

- $$\begin{cases} P(\omega) = \operatorname{Re}(H(j\omega)) & \text{część rzeczywista} \\ Q(\omega) = \operatorname{Im}(H(j\omega)) & \text{część urojona} \end{cases}$$

- $$\begin{cases} A(\omega) = |H(j\omega)| & \text{moduł} \\ \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) & \text{faza} \end{cases}$$

➤ Związek między postacią algebraiczną i wykładniczą

$$H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

➤ Charakterystyki $P(\omega)$ i $A(\omega)$ są funkcjami parzystymi

➤ Charakterystyki $Q(\omega)$ i $\varphi(\omega)$ są funkcjami nieparzystymi

Przykład 1

Narysować charakterystyki częstotliwościowe transmitancji

$$H(s) = \frac{1000}{s + 1000}$$

$$H(j\omega) = \frac{1000}{j\omega + 1000} = \frac{1000(1000 - j\omega)}{\omega^2 + 10^6} = \frac{10^6 - j10^3\omega}{\omega^2 + 10^6}$$

$$\operatorname{Re}(H(j\omega)) = \frac{10^6}{\omega^2 + 10^6}, \quad \operatorname{Im}(H(j\omega)) = -\frac{10^3\omega}{\omega^2 + 10^6}$$

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} = \frac{\sqrt{10^{12} + 10^6\omega^2}}{\omega^2 + 10^6} = \frac{10^3}{\sqrt{10^6 + \omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{-\frac{10^3\omega}{10^6 + \omega^2}}{\frac{10^6}{10^6 + \omega^2}} = -\arctan \frac{\omega}{1000}$$

Charakterystyki Bodego

- Transmitancja jest funkcją przyjmującą wartości zespolone i w wygodny sposób można ją reprezentować poprzez moduł $A(\omega)$ i fazę $\varphi(\omega)$

$$H(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \quad (1)$$

- Logarytmując obustronnie (1) otrzymujemy

$$\log H(j\omega) = \log A(\omega) + \varphi(\omega)$$

- Charakterystyki Bodego
 - amplitudowa: $M(\omega) = 20 \log A(\omega)$
 - fazowa: $\varphi(\omega)$
- Charakterystyki Bodego sporządza się w logarytmicznej skali zmiennej $\omega > 0$

- Jednostką na osi odciętych jest **dekada**
- Dekadzie odpowiada dziesięciokrotna zmiana pulsacji, czyli długość przedziału $(\omega, 10\omega)$, $(10\omega, 100\omega)$, itd.

$$\log 10\omega - \log \omega = \log 10 = 1$$

$$\log 100\omega - \log 10\omega = \log 10 = 1$$

- Jednostką charakterystyki amplitudowej jest **decybel**
- Wartości $M(\omega_1)$ i $M(\omega_2)$ różnią się o jeden decybel, gdy

$$20 \log A(\omega_1) - 20 \log A(\omega_2) = 1$$

$$\Downarrow$$

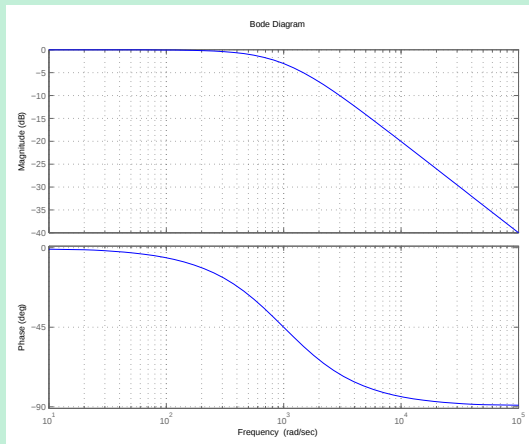
$$\log \frac{A(\omega_1)}{A(\omega_2)} = 0.05 \Rightarrow A(\omega_1) = 1,12A(\omega_2)$$

Przykład 2

Narysować wykresy Bodego dla transmitancji podanej w przykładzie 1

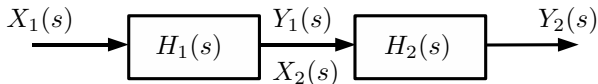
Funkcja bode w pakiecie Matlab

```
l=1000;  
m=[1 1000];  
bode(l,m);
```



Połączenia transmitancji

Połączenie szeregowe



Założmy, że $Y(s) = Y_2(s)$ i $X(s) = X_1(s)$

$$H_1(s) = \frac{Y_1(s)}{X_1(s)} = \frac{Y_1(s)}{X(s)}, \quad H_2(s) = \frac{Y_2(s)}{X_2(s)} = \frac{Y(s)}{X_2(s)}$$

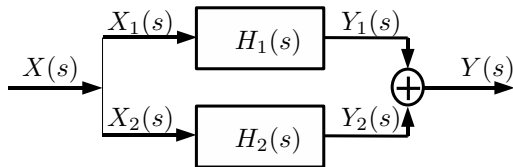
Jeśli $Y_1(s) = X_2(s)$ to

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_2(s)X_2(s)}{H_1^{-1}(s)Y_1(s)} = H_1(s)H_2(s)$$

Jeśli

$$H_1(s) = \frac{L_1(s)}{M_1(s)} \text{ i } H_2(s) = \frac{L_2(s)}{M_2(s)} \text{ to } H(s) = \frac{L_1(s)L_2(s)}{M_1(s)M_2(s)}$$

Połączenie równoległe



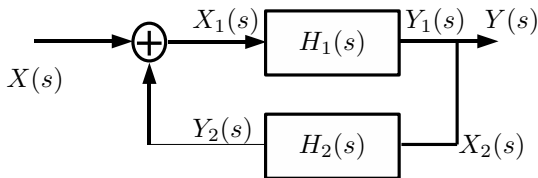
$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s), \quad X(s) = X_1(s) \text{ i } X(s) = X_2(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)X_1(s) + H_2(s)X_2(s) = (H_1(s) + H_2(s))X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = H_1(s) + H_2(s)$$

$$H(s) = \frac{L_1(s)}{M_1(s)} + \frac{L_2(s)}{M_2(s)} = \frac{L_1(s)M_2(s) + L_2(s)M_1(s)}{M_1(s)M_2(s)}$$

Połączenie ze sprzężeniem zwrotnym



$$Y(s) = Y_1(s), X_2(s) = Y_1(s) \text{ i } X_1(s) = X(s) \pm Y_2(s)$$

$$Y(s) = H_1(s)X_1(s) = H_1(s)(X(s) \pm Y_2(s)) = H_1(s)(X(s) \pm H_2(s)Y(s))$$

$$Y(s)(1 \mp H_1(s)H_2(s)) = H_1(s)X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 \mp H_1(s)H_2(s)}$$

$$H(s) = \frac{\frac{L_1(s)}{M_1(s)}}{1 \mp \frac{L_1(s)L_2(s)}{M_1(s)M_2(s)}} = \frac{L_1(s)M_2(s)}{M_1(s)M_2(s) \mp L_1(s)L_2(s)}$$

Transmitancja systemu czasu dyskretnego

- Funkcje transmitancji systemów czasu dyskretnego wykazują wiele podobieństw do funkcji transmitancji systemów czasu ciągłego
- Przekształcenie $\mathcal{Z}$ systemu czasu dyskretnego jest superpozycją składowych pochodzących od wymuszenia $X(z)$ i warunków początkowych
- Definiując transmitancję zakłada się, że warunki początkowe są zerowe, tzn. odpowiedź systemu jest wynikiem działania jedynie wymuszenia. Wówczas

$$Y(z) = \frac{\tilde{L}(z^{-1})}{\tilde{M}(z^{-1})} X(z) = \frac{L(z)}{M(z)} X(z)$$

współczynniki wielomianów $L(z)$ i $M(z)$ oraz $L(\tilde{z}^{-1})$ i $M(\tilde{z}^{-1})$ są funkcjami parametrów danego systemu

- Transmitancją $H(z)$ systemu czasu dyskretnego nazywa się wielkość

$$H(z) = \left. \frac{Y(z)}{X(z)} \right|_{\text{przy zerowych warunkach początkowych}}$$

Charakterystyki częstotliwościowe

- Na podstawie powiązania transformaty Laplace'a z transformatą $\mathcal{Z}$ wiadomo, że

$$z = e^{sT_s}$$

gdzie T_s jest czasem próbkowania

- Charakterystyki częstotliwościowe dla systemów ciągłych określa się dla $s = j\omega$, $\omega \in (-\infty, \infty)$
- Odpowiada to zmiennej $z = e^{j\omega T_s}$
- W wielu przypadkach operuje się pulsacją względną $\Omega = \omega T_s$, wtedy $z = e^{j\Omega}$

➤ Charakterystyka amplitudowo-fazowa

$$H(e^{j\Omega}) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}}$$

- Funkcja wykładnicza $e^{j\Omega}$ jest okresowa o okresie 2π , stąd transmitancja $H(z)$ także jest okresowa z okresem 2π dla zmiennej Ω lub o okresie $\frac{2\pi}{T_s}$ dla zmiennej ω
- Przedział zmienności ogranicza się do pojedynczego okresu
- Transmitancja $H(z)$ jest funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej Ω
- Wartości $H(z)$ można reprezentować w postaci wykładniczej

$$H(z) = A(e^{j\Omega})e^{\varphi(e^{j\Omega})}$$

gdzie

$$\begin{cases} A(\Omega) = |H(e^{j\Omega})| & \text{moduł (charakterystyka amplitudowa)} \\ \varphi(\Omega) = \arg(H(e^{j\Omega})) & \text{faza (charakterystyka fazowa)} \end{cases}$$

Przykład 3

Wykreślić charakterystyki częstotliwościowe układu opisanego transmitancją

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$z = e^{j\Omega}$ stąd

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}} = \frac{1}{1 - a \cos(\Omega) + ja \sin(\Omega)}$$

$$A(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a \cos(\Omega) + a^2}}$$

$$\varphi(\Omega) = -\arctan \frac{a \sin(\Omega)}{1 - a \cos(\Omega)}$$

DEMO: przyklad3.m