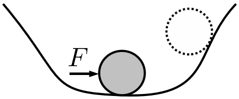
Stabilność

Krzysztof Patan

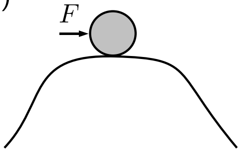
Pojęcie stabilności systemu

- Rozważmy obiekt znajdujący się w punkcie równowagi
- Po przyłożeniu do obiektu siły F zostanie on wypchnięty ze stanu równowagi
- Jeżeli po upłynięciu jakiegoś czasu obiekt znowu znajdzie się w położeniu początkowym to mówimy, że jest stabilny
- Jeżeli obiekt nie powraca do stanu początkowego mówimy o obiekcie niestabilnym

(a)



(b)



Warunki stabilności systemów czasu ciągłego

System liniowy ciągły będziemy nazywali stabilnym ze względu na wymuszenie, jeżeli dowolny ograniczony sygnał wejściowy

$$\sup_{n \in [o,\infty)} |x(t)| \leqslant \eta$$

powoduje powstanie ograniczonego sygnału wyjściowego

$$\sup_{n \in [o,\infty)} |y(t)| \leqslant \eta$$

Stabilność systemu ciągłego

Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby przyczynowy system czasu ciągłego był stabilny jest, aby wszystkie bieguny jego transmitancji $H(s)$ leżały w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s ($Re(s) < 0$), a stopień licznika transmitancji był nie większy od stopnia mianownika

Kryterium Hurwitza

- W roku 1895 Adolf Hurwitz podał warunki jakie musi spełniać wielomian, aby jego pierwiastki leżały w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s
- Rozpatrzmy wielomian

$$a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \quad a_m > 0. \tag{1}$$

Wielomian (1) nazywamy wielomianem Hurwitza, albo wielomianem stabilnym, jeśli jego pierwiastki leżą w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s

Tw.1. Warunek konieczny stabilności

Jeżeli wielomian (1) jest wielomianem Hurwitza, to wszystkie jego współczynniki są dodatnie, tzn

$$a_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

- Twierdzenie 1 pozwala proste wskazanie, który wielomian nie jest wielomianem Hurwitza

Przykład 1

Sprawadzić które z podanych wielomianów to wielomiany Hurwitza

(a) $s^2 - s + 1$,

(b) $s^2 + 1$,

(c) $s^3 + s^2 + 4s + 30$

Przykład 2

Wyznaczyć bieguny wielomianu $s^3 + s^2 + 4s + 30$

- Twierdzenie 1 określa warunek konieczny, ale jak pokazuje przykład 2 nie jest to warunek dostateczny
- Należy podać mocniejsze twierdzenie podające warunki konieczny i dostateczny stabilności

➢ Zdefiniujmy macierz Hurwitza

$$H_m = \begin{bmatrix} a_{m-1} & a_m & 0 & 0 & \dots \\ a_{m-3} & a_{m-2} & am-1 & a_m & \dots \\ a_{m-5} & a_{m-4} & am-3 & a_{m-2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

➢ Wprowadźmy minory główne

$$\Delta_1 = a_{m-1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_m \\ a_{m-3} & a_{m-2} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{m-1} & a_m & 0 \\ a_{m-3} & a_{m-2} & a_{m-1} \\ a_{m-5} & a_{m-4} & a_{m-3} \end{vmatrix}, \quad \Delta_m = \det(H_m)$$

Tw.2. Warunek stabilności Hurwitza

Wielomian (1) jest wielomianem stabilnym wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jego minory główne są dodatnie, tzn.

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_m > 0$$

- stosowanie twierdzenia 2 wymaga obliczenia $m-1$ wyznaczników
- można złagodzić wymagania obliczeniowe stosując modyfikację twierdzenia Hurwitza
- modyfikacja nosi nazwę twierdzenia Hurwitza-Lienarda

Przykład 3

Za pomocą kryterium Hurwitza sprawdzić stabilność wielomianu z przykładu 2

Wielomian $s^3 + s^2 + 4s + 30$ ma wszystkie współczynniki dodatnie

Obliczamy wyznaczniki

$\Delta_1 = 1 > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 30 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 40 = -26 < 0$$

System jest niestabilny

Wynik można zweryfikować z wynikami uzyskanymi w przykładzie 2

Przykład 3

Za pomocą kryterium Hurwitza sprawdzić stabilność wielomianu
$s^4 + 2s^3 + ks^2 + 4s + 5$

współczynniki powinny być dodatnie, więc $k > 0$

Obliczamy wyznaczniki

$\Delta_1 = 2 > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & k \end{vmatrix} = 2k - 4 > 0 \to k > 2$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & k & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 8k - 36 > 0 \to k > 4,5$$

Kryterium Routha

- Klasyczne kryterium Hurwitza wymaga obliczania $m-1$ wyznaczników stopnia od 1 do $m-1$ włącznie
- Obliczenie wartości wyznacznika stopnia k-tego wymaga nakładu obliczeniowego rzędu k^2
- Kryterium Hurwitza jest niedogodne dla większych wartości m (dla wielomianów wysokiego stopnia)
- Wymienionych wyżej wad nie posiada kryterium Routha, które wymaga sprawdzenia większej liczby wyznaczników, ale wyłącznie stopnia drugiego
- Aby zabadać stabilność systemu metodą Routha należy skonstruować tzw. *tablicę Routha*

Tablica Routha

$$\begin{array}{cccc}
a_m & a_{m-2} & a_{m-4} & \dots \\
a_{m-1} & a_{m-3} & a_{m-5} & \dots \\
b_{m-2} & b_{m-4} & b_{m-6} & \dots \\
c_{m-3} & c_{m-5} & c_{m-7} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
d_2 & d_0 & 0 & \dots \\
e_1 & 0 & 0 & \dots \\
f_0 & 0 & 0 & \dots
\end{array}$$

gdzie

$$b_{m-2} = \frac{a_{m-1}a_{m-2} - a_m a_{m-3}}{a_{m-1}} \qquad c_{m-3} = \frac{b_{m-2}a_{m-3} - a_{m-1}b_{m-4}}{b_{m-2}}$$

$$b_{m-4} = \frac{a_{m-1}a_{m-4} - a_m a_{m-5}}{a_{m-1}} \qquad c_{m-5} = \frac{b_{m-2}a_{m-5} - a_{m-1}b_{m-6}}{b_{m-2}}$$

$$b_{m-6} = \frac{a_{m-1}a_{m-6} - a_m a_{m-7}}{a_{m-1}} \qquad c_{m-7} = \frac{b_{m-2}a_{m-7} - a_{m-1}b_{m-8}}{b_{m-2}}$$

- Liczba wierszy tablicy jest równa $m+1$, liczba kolumn jest równa $\frac{m}{2}+1$ (dla m parzystego) lub $\frac{m+1}{2}$ (dla m nieparzystego)
- Łatwo zauważyć, że liczniki wyrażeń c_i d_i itd. są wyznacznikami drugiego stopnia ze znakiem minus
- Kolejne elementy tablicy Routha są wyliczane w sposób analogiczny
- Wartość ostatniego niezerowego elementu każdej kolumny jest równa a_0 (sposób na sprawdzenie poprawności obliczeń)

Tw. 3. Kryterium Routha

Wielomian (1) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie elementy pierwszej kolumny tablicy Routha tego wielomianu są dodatnie, tzn.

$$a_m > 0, \quad a_{m-1} > 0, \quad b_{m-2} > 0, \quad c_{m-3} > 0, \ldots, e_1 > 0, \quad f_0 > 0$$

Przykład 4

Sprawdzić stabilność wielomianu $s^3 + s^2 + 4s + 30$

Tablica Routha ma 4 wiersze i 2 kolumny

$$\begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \\ b_1 & 0 \\ c_0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 1 & 30 \\ b_1 & 0 \\ c_0 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 30 = -26$$

$$c_0 = \frac{b_1 30 - 1 \cdot 0}{b_1} = 30$$

Ostatecznie

$$\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 1 & 30 \\ -26 & 0 \\ 30 & 0 \end{array}$$

System jest niestabilny

Przykład 4

Sprawdzić stabilność wielomianu $s^3 + s^2 + 4s + 30$

Tablica Routha ma 4 wiersze i 2 kolumny

$$\begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \\ b_1 & 0 \\ c_0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 1 & 30 \\ b_1 & 0 \\ c_0 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2} = 1{\cdot}4 - 1{\cdot}30 = -26$$

$$c_0 = \frac{b_1 30 - 1 \cdot 0}{b_1} = 30$$

Ostatecznie

$$\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 1 & 30 \\ -26 & 0 \\ 30 & 0 \end{array}$$

System jest niestabilny

Przykład 4

Sprawdzić stabilność wielomianu $s^3 + s^2 + 4s + 30$

Tablica Routha ma 4 wiersze i 2 kolumny

$$\begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \\ b_1 & 0 \\ c_0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 1 & 30 \\ b_1 & 0 \\ c_0 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2} = 1 \cdot 4 - 1 \cdot 30 = -26$$

$$c_0 = \frac{b_1 30 - 1 \cdot 0}{b_1} = 30$$

Ostatecznie

$$\begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 1 & 30 \\ -26 & 0 \\ 30 & 0 \end{array}$$

System jest niestabilny

Przykład 4

Sprawdzić stabilność wielomianu $s^3 + s^2 + 4s + 30$

Tablica Routha ma 4 wiersze i 2 kolumny

$$\begin{array}{cc} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \\ b_1 & 0 \\ c_0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ 1 & 30 \\ b_1 & 0 \\ c_0 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2} = 1{\cdot}4 - 1{\cdot}30 = -26$$

$$c_0 = \frac{b_1 30 - 1 \cdot 0}{b_1} = 30$$

Ostatecznie

$$\begin{array}{cc} \color{blue}{1} & 4 \\ \color{blue}{1} & 30 \\ \color{red}{-26} & 0 \\ \color{blue}{30} & 0 \end{array}$$

System jest niestabilny

Kryterium Nyquista

- Kryterium Nyquista należy do grupy kryteriów częstotliwościowych
- Jest stosowane do systemów ze sprzężeniem zwrotnym
- Kryterium Hurwitza czy Routha wymaga znajomości postaci analitycznej wielomianu mianownika transmitancji
- Kryterium Nyquista oferuje większe możliwości, gdyż wymaga znajomości odpowiednich charakterystyk częstotliwościowych, które można zmierzyć
- Kryterium Nyquista pozwala na sprawdzenie stabilności układu zamkniętego na podstawie badania układu otwartego
- W przypadku otwarcia pętli sprzężenia zwrotnego transmitancja zastępcza przyjmuje postać $H_0(s) = H_1(s)H_2(s)$

Tw. 4. Kryterium Nyquista

System czasu ciągłego z ujemnym sprzężeniem zwrotnym jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres charakterystyki amplitudowo-fazowej (charakterystyki Nyquista) systemu otwartego $H_0(j\omega),\ \omega \in (-\infty, \infty)$ okrąża punkt $s = (-1, j0)$ dokładnie m razy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara, gdzie m jest liczbą biegunów funkcji $H_0(s)$ położonych w prawej półpłaszczyźnie $Re(s) > 0$

- Badanie układu zamkniętego metodą Nyquista, w przypadku gdy układ otwarty jest niestabilny jest niepraktyczne
- Wymagane jest ustalenie liczby biegunów niestabilnych
- Można to ustalić na drodze analitycznej przy znajomości transmitancji układu
- Ale w takich przypadkach wygodniej jest użyć kryterium Hurwitza lub Routha

- Najważniejszym przypadkiem z praktycznego punktu widzenia jest sytuacja, gdy układ otwarty jest stabilny
- W takim przypadku kryterium Nyquista przybiera postać

Tw. 5. Kryterium Nyquista

Gdy system otwarty jest stabilny ($m = 0$) to system ze sprzężeniem zwrotnym jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy wykres Nyquista nie zawiera punktu $s = (-1, j0)$

Przykład 5

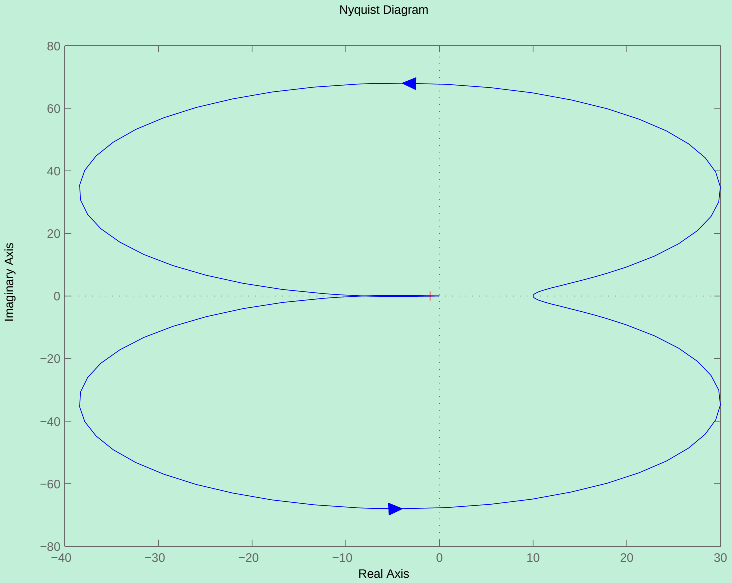
Zbadać stabilność układu zamkniętego o transmitancji $G_z(s) = \frac{G_1(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$ za pomocą kryterium Nyquista.

$$G_1(s) = \frac{10}{3s^3 + 2s^2 + s + 1} \quad G_2(s) = 1,9s + 1$$

Transmitancja układu otwartego

$$G_o(s) = \frac{10(1,9s + 1)}{3s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Układ otwarty jest niestabilny: $s_1 = 0,7839$, $s_2 = 0,0586 + j0.6495$, $s_3 = 0,0586 - j0.6495$



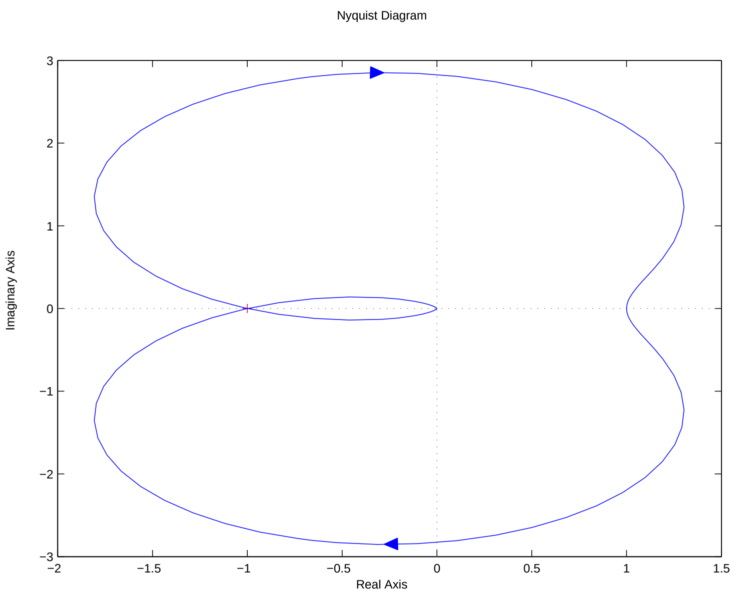
Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis
80
60
40
20
0
−20
−40
−60
−80
−40
−30
−20
−10
0
10
20
30

Przykład 6

Zbadać stabilność układu zamkniętego na podstawie transmitancji układu otwartego postaci

$$G_o(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + s + 1}$$

Układ otwarty jest stabilny:
$s_1 = -1,7549$,
$s_2 = -0,1226 + j0.7449$,
$s_3 = -0,1226 - j0.7449$

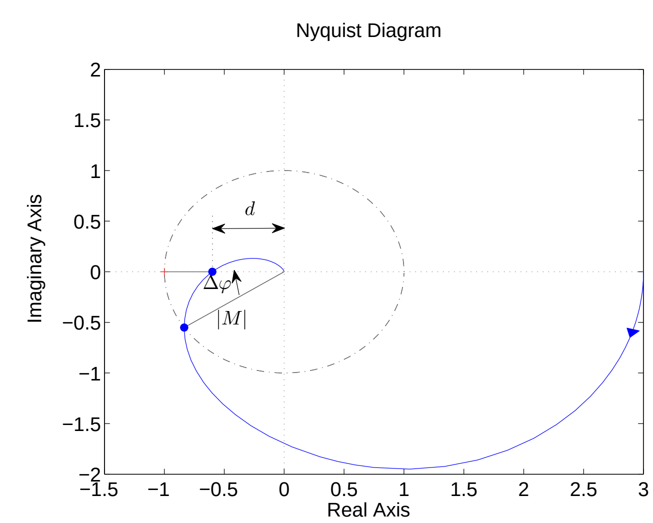


Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis
3
2
1
0
−1
−2
−3
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5

Zapas stabilności

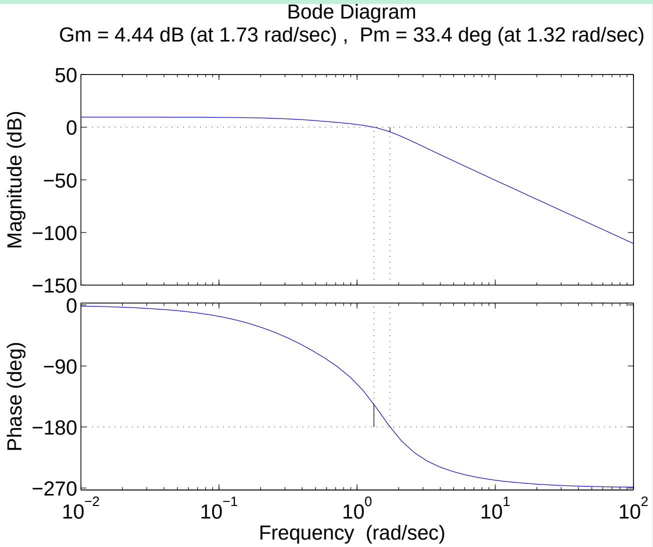
- Kryterium Nyquista opiera się o zasadę przyrostu fazy Cauchy'ego, która analizuje funkcję $X(s)$ poprzez obieganie bieguna s względem środka układu współrzędnych
- Kryterium Nyquista analizuje stabilność układu zamkniętego postaci:
$$G_z(s) = \frac{G_1(s)}{1 + G_o(s)}$$
czyli analizowana jest transmitancja
$$X(s) = 1 + G_o(s)$$
- Jeżeli analizujemy układ poprzez rozważanie układu otwartego, więc
$$G_o = X(s) - 1$$
i środek układu współrzędnych przesuwany jest do punktu $s = (-1, j0)$
- W punkcie $s = (-1, j0)$ moduł amplitudy $|M| = 1$ i przesunięcie fazowe $\varphi = -180^o$

Interpretacja zapasu stabilności – charakterystyka Nyquista

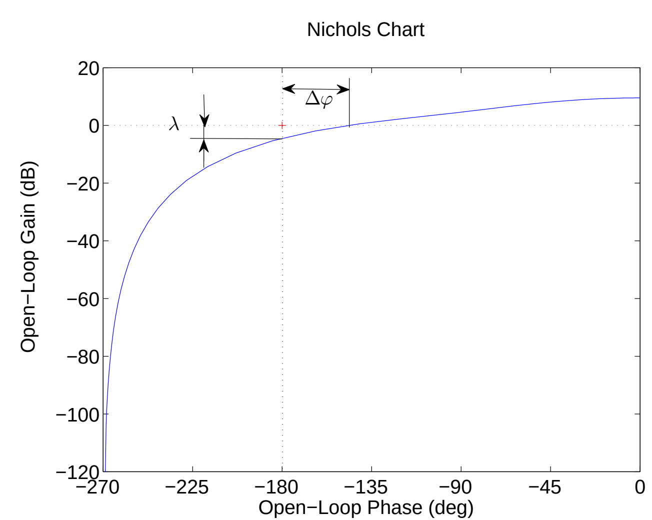


zapas wzmocnienia $k = \frac{1}{d}$, zapas modułu $\lambda = 20 \log k$

Interpretacja zapasu stabilności – charakterystyki Bodego



Interpretacja zapasu stabilności – charakterystyka Nicholsa



Warunki stabilności dla układów dyskretnych

System liniowy dyskretny będziemy nazywali stabilnym ze względu na wymuszenie, jeżeli dowolny ograniczony sygnał wejściowy

$$\sup_{n\in[o,\infty)} |x[n]| \leqslant \eta$$

powoduje powstanie ograniczonego sygnału wyjściowego

$$\sup_{n\in[o,\infty)} |y[n]| \leqslant \eta$$

Stabilność systemu dyskretnego

Warunkiem koniecznym i dostatecznym stabilności przyczynowego systemu czasu dyskretnego jest, aby wszystkie bieguny $z_i, i = 1, \ldots, m$ jego transmitancji $H(z)$ leżały wewnątrz koła jednostkowego, tzn.

$$|z_i| < 1, \quad i, 1, \ldots, m$$

Kryterium Jury

- Do zbadania stabilności systemu dyskretnego potrzebna jest informacja czy wszystkie bieguny leżą wewnątrz koła jednostkowego
- Wielomian

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m \tag{3}$$

o współczynnikach rzeczywistych nazywamy wielomianem Schura, jeśli wszystkie jego pierwiastki mają moduł mniejszy od jedności

Tw. 5. Warunek konieczny stabilności systemu dyskretnego

Jeżeli wielomian (3) w postaci znormalizowanej ($a_0 = 1$) jest wielomianem Schura, to jego współczynniki spełniają następujące nierówności

$$|a_j| < \binom{m}{j}, \quad j = 1, 2, \ldots, m$$

Przykład 6

Zbadać warunki konieczne dla wielomianu
$z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$

Aby wielomian $W(z)$ był wielomianem Schura muszą być spełnione warunki

$$|a_1| < 4, \quad |a_2| < 6, \quad |a_3| < 4, \quad |a_4| < 1$$

Zatem wielomian $W_1(z) = z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 2z + 0,8$ nie jest wielomianem Schura

Natomiast wielomian $W_2(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 + 2z + 0,8$ spełnia warunki konieczne, aby być wielomianem Schura

Przykład 6

Zbadać warunki konieczne dla wielomianu
$z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$

Aby wielomian $W(z)$ był wielomianem Schura muszą być spełnione warunki

$$|a_1| < 4, \quad |a_2| < 6, \quad |a_3| < 4, \quad |a_4| < 1$$

Zatem wielomian $W_1(z) = z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 2z + 0,8$ nie jest wielomianem Schura

Natomiast wielomian $W_2(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 + 2z + 0,8$ spełnia warunki konieczne, aby być wielomianem Schura

Przykład 6

Zbadać warunki konieczne dla wielomianu
$z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$

Aby wielomian $W(z)$ był wielomianem Schura muszą być spełnione warunki

$$|a_1| < 4, \quad |a_2| < 6, \quad |a_3| < 4, \quad |a_4| < 1$$

Zatem wielomian $W_1(z) = z^4 + 5z^3 + 5z^2 + 2z + 0,8$ nie jest wielomianem Schura

Natomiast wielomian $W_2(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 + 2z + 0,8$ spełnia warunki konieczne, aby być wielomianem Schura

Tablica Jury

$$
\begin{array}{lllllll}
a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{m-2} & a_{m-1} & a_m \\
a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\
b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{m-2} & b_{m-1} & \\
b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & b_1 & b_0 & \\
c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{m-2} & & \\
c_{m-2} & c_{m-3} & c_{m-4} & \dots & c_0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & & & \\
d_3 & d_2 & d_1 & d_0 & & & \\
e_0 & e_1 & e_2 & & & & \\
e_2 & e_1 & e_0 & & & & \\
f_0 & f_1 & & & & & \\
f_1 & f_0 & & & & & \\
g_0 & & & & & &
\end{array}
$$

- Wyliczenie elementów tablicy Jury
  - $$b_i = \frac{a_0 a_i - a_m a_{m-i}}{a_0}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1$$
  - $$c_i = \frac{b_0 b_i - b_{m-1} b_{m-1-i}}{b_0}, \quad i = 0, 1, \ldots, m-2$$
- Liczba wierszy tablicy Jury jest równa $2m + 1$

Tw.6. Kryterium Jury

Wielomian (3) o współczynniku $a_0 > 0$ jest wielomianem Schura wtedy i tylko wtedy, gdy współczynniki pierwszej kolumny w wierszach o numerach nieparzystych tablicy Jury są dodatnie (tzn. współczynniki a_0, b_0, c_0, itd.)

Przykład 7

Sprawdzić stabilność wielomianu $W_2(z)$ z przykładu 6

Tworzymy tablicę Jury

$$
\begin{array}{ccccc}
1 & -2 & 5 & 2 & 0,8 \\
0,8 & 2 & 5 & -2 & 1 \\
0,36 & -3,6 & 1 & 3,6 & \\
3,6 & 1 & -3,6 & 0,36 & \\
-35,64 & & & &
\end{array}
$$

$c_0 < 0 \rightarrow$ wielomian niestabilny, nie jest to wielomian Schura

dalszych współczynników nie trzeba liczyć

Przykład 7

Sprawdzić stabilność wielomianu $W_2(z)$ z przykładu 6

Tworzymy tablicę Jury

$$\begin{array}{ccccc}
1 & -2 & 5 & 2 & 0,8 \\
0,8 & 2 & 5 & -2 & 1 \\
0,36 & -3,6 & 1 & 3,6 & \\
3,6 & 1 & -3,6 & 0,36 & \\
-35,64 & & & &
\end{array}$$

$c_0 < 0 \rightarrow$ wielomian niestabilny, nie jest to wielomian Schura

dalszych współczynników nie trzeba liczyć

Przykład 7

Sprawdzić stabilność wielomianu $W_2(z)$ z przykładu 6

Tworzymy tablicę Jury

$$
\begin{array}{ccccc}
\color{blue}{1} & -2 & 5 & 2 & 0,8 \\
0,8 & 2 & 5 & -2 & 1 \\
\color{blue}{0,36} & -3,6 & 1 & 3,6 & \\
3,6 & 1 & -3,6 & 0,36 & \\
\color{red}{-35,64} & & & &
\end{array}
$$

$c_0 < 0 \rightarrow$ wielomian niestabilny, nie jest to wielomian Schura

dalszych współczynników nie trzeba liczyć

Metoda transformacji zmiennych

- Badanie stabilności systemu czasu dyskretnego można zredukować do badania stabilności systemu czasu ciągłego poprzez zastosowanie odpowiedniej transformacji zmiennych
- Wiadomo, że z powiązań pomiędzy transformatą Laplace'a, a transformatą $\mathscr{Z}$ wynikają zależności
  - oś urojona $s = j\omega$ rzutowana jest na okrąg jednostkowy $|z| = 1$
  - półpłaszczyzna $Re(s) > 0$ rzutowana jest na zewnątrz koła jednostkowego $|z| > 1$
  - półpłaszczyzna $Re(s) < 0$ rzutowana jest na wnętrze koła jednostkowego $|z| < 1$

- Przykłady przekształceń
  - $$z = e^{sT_s}$$
  - $$z = \frac{s+1}{s-1}$$
- Po przekształceniu stosuje się kryteria opracowane dla systemów ciągłych, np. kryterium Hurwitza albo Routha