Przekształcenie Laplace'a

Krzysztof Patan

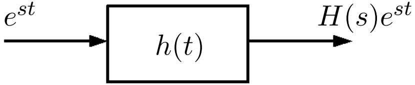
Wprowadzenie

- Transformata Fouriera – popularna metoda opisu systemów w dziedzinie częstotliwości
- Transformata Fouriera umożliwia wykonanie wielu użytecznych czynności:
  - analiza odpowiedzi systemu w dziedzinie częstotliwości
  - próbkowanie
  - modulacja
- Problem: Czy potrzebne są innego rodzaju przekształcenia?
- Odpowiedź: Transformata Fouriera nie może być zastosowana do szerokiej klasy sygnałów i niestabilnych systemów, np. kiedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt = \infty$$

- Przekształcenie Laplace'a jest rozszerzeniem transformaty Fouriera, które pozwala na analizę szerszej klasy sygnałów i systemów

- W wielu przypadkach mamy do czynienia z niestabilnymi systemami, np.
    - stabilizacja wahadła odwróconego
    - stabilizacja samolotu
    - niestabilność jest właściwością pożądaną w niektórych zastosowaniach, np. oscylatory, lasery
- Analiza takich systemów



$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

- całka musi być zbieżna
- e^{st} – funkcja własna liniowego systemu inwariantnego
- $s = \sigma + j\omega$ – wartość zespolona

Przekształcenie Laplace'a

Definicja (przekształcenie dwustronne)

$$x(t) \rightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \mathscr{L}\{x(t)\}$$

gdzie $s = \sigma + j\omega$ – wartość zespolona

Podstawowe założenia

1. Przekształcenie ma sens tylko wtedy gdy

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}dt| < \infty$$

2. Przekształcenie powinno być jedno-jednoznaczne, tzn. dla każdej funkcji $x(t)$ istnieje tylko jedna transformata $X(s)$ i na odwrót
3. Przekształcenia można dokonać na każdej funkcji dającej się ograniczyć funkcjami wykładniczymi

Podstawowe założenia - cd

4. Powiązanie z transformatą Fouriera

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt = \mathscr{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

   gdzie $\mathscr{F}$ – transformata Fouriera

5. Obszar Zbieżności (OZ) – wszystkie wartości zespolone s dla których spełniony jest warunek

$$\text{OZ} = \left\{ s = \sigma + j\omega; \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}| dt < \infty \right\}$$

6. Jeśli $s = j\omega$ jest w OZ (np. $\sigma = 0$) wtedy

$$X(s)|_{s=j\omega} = \mathscr{F}\{x(t)\}$$

Przykład 1.

$x_1(t) = e^{-at}\mathbf{1}(t)$, gdzie a – dowolna liczba rzeczywista lub zespolona

- dla $Re(a) > 0$ system jest niestabilny
- transformata Fouriera nieistnieje
- istnieje transformata Laplace'a

$$X_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}\mathbf{1}(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = -\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty}$$

$$X_1(s) = -\frac{1}{s+a}\left[e^{-(s+a)\infty} - 1\right]$$

jeśli $Re(s+a) > 0$ to $e^{-(s+a)\infty} = 0$
czyli

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \underbrace{Re(s) > -Re(a)}_{OZ}$$

Przykład 2.

$x_2(t) = -e^{-at}\mathbf{1}(-t)$

$$\begin{aligned} X_2(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}\mathbf{1}(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt && (1) \\ &= \frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a}\left[1 - e^{(s+a)\infty}\right] && (2) \end{aligned}$$

jeśli $Re(s+a) < 0$ to $e^{(s+a)\infty} = 0$
czyli

$$X_2(s) = \frac{1}{s+a}, \quad \underbrace{Re(s) < -Re(a)}_{OZ}$$

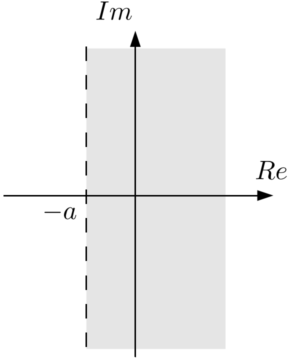
Uwaga! Do wyznaczenia $x(t)$ potrzebna jest znajomość $X(s)$ oraz OZ.
Obszar zbieżności nie jest potrzebny w przypadku transformaty Fouriera

Graficzna reprezentacja obszaru zbieżności

dla przykładu 1

$$X_1(s) = \frac{1}{s+a}$$

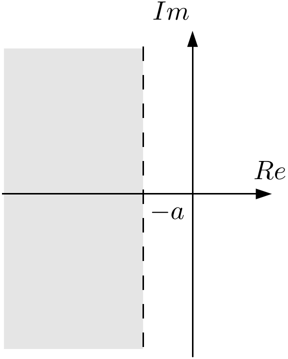
$$Re(s) > -Re(a)$$



dla przykładu 2

$$X_2(s) = \frac{1}{s+a}$$

$$Re(s) < -Re(a)$$



- Wiele najczęściej używanych i interesujących transformat posiada postać ułamkową

$$X(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$$

  gdzie $L(s)$ i $M(s)$ to wielomiany zmiennej s

- Pierwiastki $L(s)$ – zera transmitancji $X(s)$

- Pierwiastki $M(s)$ – bieguny transmitancji $X(s)$

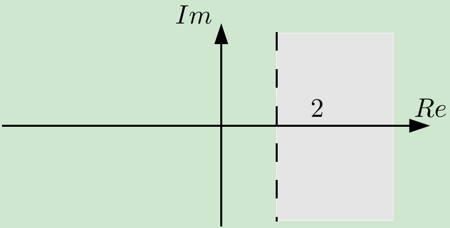
- Każdy sygnał $x(t)$ zbudowany z liniowej kombinacji zespolonych funkcji wykładniczych posiada transformatę Laplace'a w postaci ułamkowej

Przykład 3

$x(t) = 3e^{2t}\mathbf{1}(t) - 2e^{-t}\mathbf{1}(t)$

$$X(s) = \int_0^\infty \left(3e^{2t} - 2e^{-t}\right) e^{-st} dt = \underbrace{3\int_0^\infty e^{-(s-2)t} dt}_{OZ: Re(s)>2} - \underbrace{2\int_0^\infty e^{-(s+1)t} dt}_{OZ: Re(s)>-1}$$

$$X(s) = \frac{3}{s-2} - \frac{2}{s+1} = \frac{s+7}{(s-2)(s+1)} = \frac{s+7}{s^2 - s - 2}, Re(s) > 2$$



Przykład 4

Obliczyć transformatę Laplace'a funkcji $f(t) = t$

$$F(s) = \int_0^\infty te^{-st}dt$$

Stosujemy całkowanie przez części $\int udv = uv - \int vdu$

Podstawiamy: $u = t$, $du = dt$, $dv = e^{-st}dt$, $v = -\frac{1}{s}e^{-st}$

Czyli

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{-t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s}e^{-st}dt = \frac{-t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^\infty \\ &= 0 - 0 - 0 - (-\frac{1}{s^2}) = \frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Odwrotne przekształcenie Laplace'a

- Przekształcenie odwrotne polega na znalezieniu funkcji zmiennej rzeczywistej $x(t)$ przy danej funkcji $X(s)$, czyli na rozwiązaniu równania całkowego

$$X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)\mathrm{e}^{-st}dt \tag{3}$$

- Rozwiązanie to jest określane wzorem Riemanna-Melina:

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)\mathrm{e}^{st}ds \tag{4}$$

- Bezpośrednie korzystanie ze wzoru (4) jest trudne
- W praktyce wzór (4) jest stosowany bardzo rzadko – zwłaszcza, że dla większości funkcji istnieją efektywne metody znacznie upraszczające zagadnienie

Właściwości przekształcenia Laplace'a

1. Liniowość

$$\mathscr{L}\left\{ax_1(t) + bx_2(t)\right\} = aX_1(s) + bX_2(s)$$

gdzie a, b są stałymi

2. Całkowanie w dziedzinie rzeczywistej

$$\mathscr{L}\left\{\int_0^\infty x(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}X(s)$$

3. Różniczkowanie w dziedzinie rzeczywistej

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}x(t)\right\} = s^n X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1}x^{(k)}(0^-)$$

gdzie

$$x(0^-) = \lim_{t\to 0^-} x(t)$$

4. Całkowanie w dziedzinie zespolonej

$$\int_0^\infty X(s)ds = \mathscr{L}\left\{\frac{x(t)}{t}\right\}$$

5. Różniczkowanie w dziedzinie zespolonej

$$\frac{\mathrm{d}^n X(s)}{\mathsf{d} s^n} = (-1)^n \mathscr{L}\left\{t^n x(t)\right\}$$

6. Przesunięcie czasu w dziedzinie rzeczywistej

$$\mathscr{L}\left\{x(t-t_0)\mathbf{1}(t-t_0)\right\} = \mathsf{e}^{-st_0} X(s)$$

7. Przesunięcie w dziedzinie zespolonej

$$X(s-a) = \mathscr{L}\left\{\mathsf{e}^{at} x(t)\right\}$$

8. Zmiana skali

$$\mathscr{L}\left\{x(at)\right\} = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right)$$

9. Splot funkcji

$$\mathscr{L}\left\{x_1(t) * x_2(t)\right\} = X_1(s) X_2(s)$$

gdzie splot

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_0^t x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t x_1(t-\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

Przykład 5

Obliczyć transformatę sygnału $x(t) = \cos(\omega_0 t), \; t \geqslant 0, \; \omega_0 \in R$

Stosując wzór Eulera otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{\cos(\omega)\} &= \frac{1}{2}\mathscr{L}\{e^{j\omega_0 t}\} + \frac{1}{2}\mathscr{L}\{e^{-j\omega_0 t}\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s - j\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{s + j\omega_0} \\
&= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}
\end{aligned}
$$

Ćwiczenie. Sprawdzić czy prawdziwa jest zależność

$$
\mathscr{L}\{\sin(\omega)\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}
$$

Przykład 6

Policzyć transformatę sygnału $x(t) = \mathbf{1}(t)$ i na tej podstawie policzyć $\mathscr{L}\{t\}$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

Z własności 5 otrzymujemy

$$\frac{\mathrm{d}X(s)}{\mathsf{d}s} = -1\mathscr{L}\left\{tx(t)\right\}$$

$$\mathscr{L}\left\{t\right\} = -\frac{\mathrm{d}\frac{1}{s}}{\mathsf{d}s} = -\frac{1}{s^2}$$

Ćwiczenie. W podobny sposób policzyć $\mathscr{L}\{t^2\}$

Wyznaczanie transformat i oryginałów

Metoda rozkładu na ułamki proste

- Mianownik, jako wielomian m-tego stopnia, ma m pierwiastków, w ogólności zespolonych, przy czym niektóre z nich mogą się powtarzać
- Funkcję $X(s)$ można przedstawić w postaci sumy ułamków prostych, t.j. takich, których mianownik jest pewną potęgą dwumianu $(s-s_i)^k$, $k=1,2,\ldots,a_i$:

$$\frac{L(s)}{M(s)} = \frac{A_{11}}{s-s_1} + \frac{A_{12}}{(s-s_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1a_1}}{(s-s_1)^{a_1}} + \cdots + \frac{A_{pa_p}}{(s-s_p)^{a_p}}$$

czyli

$$X(s) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{a_i} \frac{A_{ij}}{(s-s_i)^{a_j}}$$

- Zauważmy, że:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-s_i)^k}\right\} = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\mathsf{e}^{s_i t}$$

- Po dokonaniu rozkładu na ułamki proste dostajemy transformatę odwrotną w postaci:

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{a_i}\frac{A_{ij}}{(j-1)!}t^{j-1}\mathsf{e}^{s_i t}$$

W przypadku, gdy wszystkie pierwiastki mianownika są pojedyncze to w rozkładzie na ułamki proste wystąpią tylko współczynniki A_{i1} i transformata odwrotna ma postać

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = \sum_{i=1}^{m} A_{i1} e^{s_i t}$$

Dodatkowo, w przypadku gdy niektóre pierwiastki są zespolone transformata odwrotna ma postać

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = \sum_{i=1}^{m} A_{i1} e^{s_i t} + 2Re \sum_{j=1}^{r} A_{j1} e^{s_j t}$$

gdzie n – ilość pierwiastków rzeczywistych, r – ilość par pierwiastków zespolonych, s_j – pierwiastki zespolone (suma obejmuje po jednym pierwiastku na parę sprzężoną)

Przykład 7

Znaleźć transformatę odwrotną funkcji

$$F(s) = \frac{4s+8}{2s^3+14s^2+30s+18}$$

Upraszczamy

$$F(s) = \frac{4s+8}{s^3+7s^2+15s+9}$$

Są dwa pierwiastki mianownika przy czym drugi jest podwójny:

$$s_1 = -1, s_2 = -3$$

Rozkład wygląda następująco:

$$F(s) = \frac{A_{11}}{s+1} + \frac{A_{21}}{s+3} + \frac{A_{22}}{(s+3)^2}$$

Porównujemy otrzymany rozkład z transmitancją i dostajemy

$$A_{11}(s+3)^2 + A_{21}(s+1)(s+3) + A_{22}(s+1) = 2s+4$$

Stąd

$$\begin{cases} A_{11} + A_{21} & = 0 \\ 6A_{11} + 4A_{21} + A_{22} & = 2 \\ 9A_{11} + 3A_{21} + A_{22} & = 4 \end{cases}$$

Rozwiązanie układu równań: $A_{11} = \frac{1}{2}$, $A_{21} = -\frac{1}{2}$, $A_{22} = 1$
Rozkład na ułamki proste:

$$F(s) = \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{2(s+3)} + \frac{1}{(s+3)^2}$$

Oryginał

$$f(t) = \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} + te^{-3t}$$

Metoda residuów

- Przez residuum funkcji $X(s)$ w biegunie $s = s_i$ rozumiemy współczynniki A_{i1} rozwinięcia funkcji $X(s)$ w szereg Laurenta w otoczeniu punktu $s = s_i$, tzn. rozwinięcia:

$$F(s) = \sum_{n} \frac{A_{in}}{(s - s_i)^n} \tag{5}$$

gdzie n przybiera wartości całkowite z przedziału $(-\infty, \infty)$

- Część sumy (5) dla $n > 0$ nazywamy częścią główną rozwinięcia
- Metoda residuów jest ogólniejsza od metody rozkładu na ułamki proste, gdyż ma zastosowanie także do transformat nie będących funkcjami wymiernymi

- Fundamentalnym wzorem tej metody jest:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{X(s)\right\} = \sum_i \operatorname*{res}_{s=s_i}\left\{X(s)\mathrm{e}^{st}\right\}$$

  gdzie s_i – bieguny funkcji $X(s)$
- Jeśli $X(s)$ jest funkcją wymierną, to

$$\operatorname*{res}_{s=s_i}\left\{X(s)\mathrm{e}^{st}\right\} = \frac{1}{(a_i-1)!}\lim_{s\to s_i}\left\{\frac{\mathrm{d}^{a_i-1}}{\mathrm{d}s^{a_i-1}}X(s)(s-s_i)^{a_i}\mathrm{e}^{st}\right\}$$

- W przypadku gdy biegun jest jednokrotny

$$\operatorname*{res}_{s=s_i}\left\{X(s)\mathrm{e}^{st}\right\} = \lim_{s\to s_i}\left\{X(s)(s-s_i)^{a_i}\mathrm{e}^{st}\right\}$$

Przykład 8

Znaleźć metodą residuów

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s+4}{s^3+7s^2+15s+9}\right\}$$

Są dwa pierwiastki mianownika przy czym drugi jest podwójny:

$$s_1=-1, s_2=-3$$

$$\underset{s=s_1}{\mathsf{res}}\left\{F(s)e^{st}\right\}=\lim_{s\to-1}\frac{2s+4}{(s+3)^2}e^{st}=\frac{1}{2}e^{-t}$$

$$\underset{s=s_2}{\mathsf{res}}\left\{F(s)e^{st}\right\}=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to-3}\left\{\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\frac{2s+4}{s+1}e^{st}\right\}$$
$$=\frac{-2}{(s+1)^2}e^{-3t}+\frac{2s+4}{s+1}te^{-3t}=-\frac{1}{2}e^{-3t}+te^{-3t}$$

Ostatecznie

$$f(t)=\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{1}{2}e^{-3t}+te^{-3t}$$

Transformata funkcji okresowej

- Transformata funkcji okresowej $x(t)$ o okresie T dana jest wzorem

$$\mathscr{L}\left\{x(t)\right\} = \frac{X_T(s)}{1 - \mathsf{e}^{-sT}}$$

gdzie

$$X_T(s) = \int_0^T x(t)\mathsf{e}^{-st}dt$$

Transformaty funkcji impulsowych

- Impuls Diraca $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t) dt = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \Longrightarrow \int_{-\infty}^{t} \delta(t) dt = \mathbf{1}(t)$$

Powiązanie impulsu Diraca z funkcją skokową

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{1}(t) = \delta(t)$$

Korzystając z właściwości 3 otrzymujemy

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t)\right\} = sX(s) = s\frac{1}{s} = 1$$

Zastosowanie transformaty Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych

Przykład 9

Rozwiązać uproszczone równanie różniczkowe opisujące ruch samochodu za pomocą przekształcenia Laplace'a

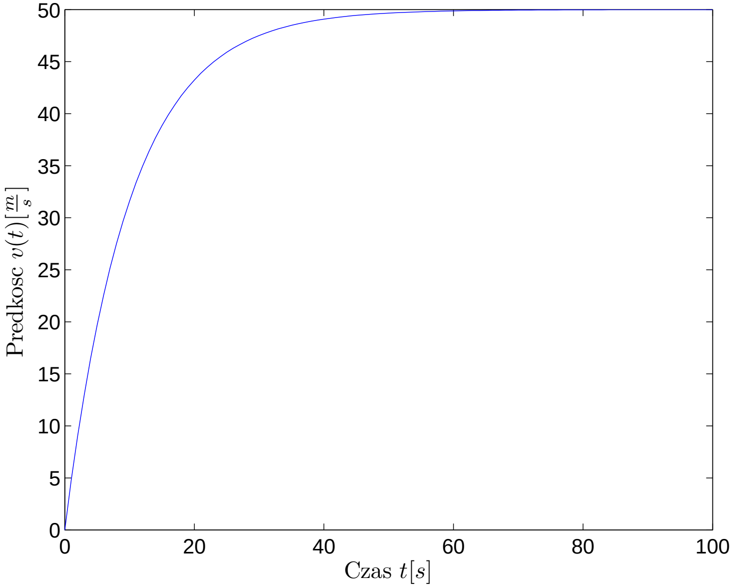
$$\frac{\mathsf{d}v(t)}{\mathsf{d}t} + 0,1v(t) = 5,\ t \geqslant 0, v(0) = 0$$

Obliczamy transformatę Laplace'a obu stron równania oraz stosujemy własność 3

$$sV(s) + 0,1V(s) = 5\frac{1}{s} \quad \Longrightarrow \quad V(s) = \frac{5}{s(s+0,1)}$$

Obliczamy transformatę odwrotną

$$v(t) = 50(1 - e^{-0,1t})\mathbf{1}(t)$$



Predkosc $v(t)[\frac{m}{s}]$
Czas $t[s]$
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
0
20
40
60
80
100

Przykład 10

Model zawieszenia koła samochodu opisany jest przez równanie różniczkowe

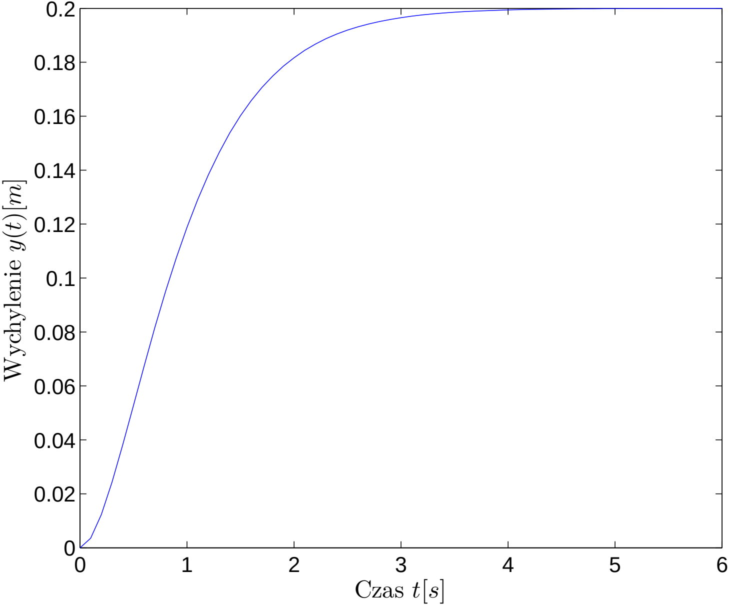
$$5\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 20\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 20y(t) = 4,\ t \geqslant 0,\ y(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}y(0)}{\mathrm{d}t} = 0$$

Obliczamy transformatę Laplace'a obu stron równania oraz stosujemy własność 3

$$5s^2Y(s) + 20sY(s) + 20Y(s) = 4\frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{4}{5s(s+2)^2}$$

Obliczamy transformatę odwrotną

$$y(t) = 0,2(1 - e^{-2t} - 2te^{-2t})\mathbf{1}(t)$$



0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0
1
2
3
4
5
6
Wychylenie $y(t)[m]$
Czas $t[s]$

Przykład 11

Pewien system opisany jest równaniem różniczkowym

$$\frac{\mathrm{d}^3 y(t)}{\mathrm{d}t^3} + 6\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 11\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + 6y(t) = x(t),\ t \geqslant 0$$

Wyznaczyć odpowiedź systemu na wymuszenie $x(t) = e^{-4t}\mathbf{1}(t)$ przy zerowych warunkach początkowych.

Po zastosowaniu transformaty Laplace'a

$$s^3Y(s) + 6s^2Y(s) + 11sY(s) + 6Y(s) = X(s) \Rightarrow X(s) = \frac{1}{(s+4)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s+4)(s^3+6s^2+11s+6)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Stosujemy rozkład na ułamki proste

$$Y(s) = \frac{1}{6(s+1)} - \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{2(s+3)} - \frac{1}{6(s+4)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{6(s+1)} - \frac{1}{2(s+2)} + \frac{1}{2(s+3)} - \frac{1}{6(s+4)}$$

Obliczamy transformatę odwrotną

$$y(t) = \left(\frac{1}{6}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{6}e^{-4t}\right)\mathbf{1}(t)$$