Systemy

Krzysztof Patan

Systemy z pamięcią

- System jest bez pamięci (statyczny), jeżeli dla dowolnej chwili t_0 wartość sygnału wyjściowego $y(t_0)$ zależy wyłącznie od wartości sygnału wejściowego w tej samej chwili ($x(t_0)$)
- Jeżeli $y(t_0)$ zależy od wartości sygnału wejściowego $x(t)$ w chwilach poprzedzających lub następujących po t_0 to jest to system z pamięcią (dynamiczny)
- Dzielnik napięcia jest systemem statycznym

$$y(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} x(t)$$

- Układ opóźniający jest systemem dynamicznym

$$y(t) = x(t - T), \quad T > 0$$

Przyczynowość

System jest przyczynowy jeśli jego wejście nie wyprzedza przyszłych wartości sygnałów wyjściowych, tzn. jeśli wyjście w każdym momencie zależy od przeszłych wartości sygnałów wejściowych w stosunku do danego momentu

- Każdy rzeczywisty system fizyczny jest przyczynowy (ponieważ czas płynie do przodu). Efekty są widoczne po pobudzeniu systemu (przyczyna)
- Przyczynowość nie jest cechą sygnałów zmiennych w przestrzeni
- Przyczynowość nie jest cechą systemów przetwarzających wcześniej zebrane dane, np. nagrane zawody sportowe

Przykłady

$$y(t) = x^2(t-1)$$

$y(2)$ zależy od $x(1)$ – system przyczynowy

$$y(t) = x(t+1)$$

$y(2) = x(3)$ – system nie jest przyczynowy

$$y(k) = x(-k)$$

$y(-2) = x(2)$ – system nie jest przyczynowy

$$y(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} x^3(k-1)$$

$y(2)$ zależy od $x(1)$ – system przyczynowy

Stacjonarność

System jest stacjonarny jeśli jego właściwości nie są zależne od czasu, np. jeśli parametry systemu są stałe

Przykłady

$$y(t) = x^2(t+1)$$

system stacjonarny

$$y(k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} x^3(k-1)$$

system niestacjonarny (system jest zmienny w czasie)

$$y[n] = nx[n]$$

system niestacjonarny

Liniowość

System jest liniowy jeśli spełnia zasadę superpozycji:

Jeśli $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ i $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$

wtedy $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$

Przykłady

$$y(k) = x^2(k)$$

system nieliniowy

$$y(t) = x(2t)$$

system liniowy

Liniowość vs nieliniowość

- Wiele systemów ma charakter nieliniowy, np. diody półprzewodnikowe, dynamika samolotu, modele ekonometryczne
- Dlaczego warto rozważać modele liniowe?
  - liniowe modele opisują całkiem dokładnie wiele systemów, np. rezystory czy kondensatory
  - często dokonuje się linearyzacji modelu nieliniowego względem punktu pracy
  - systemy liniowe są łatwiejsze w analizie od systemów nieliniowych

Opis systemów

- W podejściu klasycznym do analizy układu dynamicznego rozpatrywane jest zachowanie układu z punktu widzenia wpływu sygnałów wejściowych na przebieg sygnałów wyjściowych
- Jest to opis typu "wejście–wyjście"
- Wyróżnia się dwa sposoby tego opisu:
  1. czasowy – za pomocą równań różniczkowych (czas ciągły) lu różnicowych (czas dyskretny)
  2. częstotliwościowy – za pomocą transmitancji operatorowej lub widmowej

Równania różniczkowe

Własności dynamiczne układu można opisać w postaci równania różniczkowego (1), dla $n \geqslant m$

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \tag{1}$$

- jeśli współczynniki $a_i,\ i = 0, \ldots, n$ i $b_j,\ i = 0, \ldots, m$ są funkcjami czasu to równanie nazywa się niestacjonarnym, a opisywany przez nie układ – układem niestacjonarnym
- jeśli współczynniki są stałe, to równanie jest równaniem stacjonarnym
- rozwiązanie równania dla różnych wymuszeń u pozwala ocenić działanie układu
- sposób rozwiązywania równań jest znany z podstaw teorii równań różniczkowych
- opis taki jest jednak mało skuteczny

Równania różnicowe

- Dyskretyzacja równań różniczkowych prowadzi do równań różnicowych
- Formuła Eulera

$$\frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=nT} \approx \frac{y(nT) - y((n-1)T)}{T}$$

- Błąd przybliżenia jest tym mniejszy im mniejsza jest długość kroku dyskretyzacji T
- Formułę Eulera można rozszerzyć na pochodne wyższych rzędów
- Równanie (1) w postaci dyskretnej przybiera postać:

$$y[n] = -\sum_{i=1}^{l} a_i[n]y[n-i] + \sum_{j=0}^{m} b_j[n]x[n-j]$$

Równania różnicowe vs splot

- W ogólności splot wymaga znajomości nieskończonej liczby współczynników, równanie różnicowe opisane jest niewielką liczbą parametrów
- Splot opisuje relację wejście-wyjście w stanie spoczynku (przy zerowych warunkach początkowych). Jeżeli warunki początkowe nie są zerowe należy wyznaczyć splot dla tych warunków
- Liczba operacji arytmetycznych potrzebna do wyznaczenia $y[n]$ dla równania różnicowego jest na ogół mniejsza niż w przypadku splotu
- Równania różnicowe są bardziej efektywnym narzędziem w analizie numerycznej
- Splot jest wygodniejszym narzędziem w analizie jakościowej systemów

Transmitancja

- Transmitancja operatorowa jest określana dla układów stacjonarnych opisanych równaniem różniczkowym (1) o stałych skupionych
- Dokonując przekształcenia Laplace'a względem obu stron tego równania, przy zerowych warunkach początkowych, otrzymuje się

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i s^i\right) Y(s) = \left(\sum_{j=0}^{m} b_j s^j\right) U(s) \tag{2}$$

gdzie

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)], \quad U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$$

- Transmitancją operatorową nazywamy stosunek transformat sygnału wyjściowego i wejściowego układu przy zerowych warunkach początkowych

$$G(s) \stackrel{def}{=} \frac{Y(s)}{U(s)}$$

- W przypadku równania (2) otrzymujemy

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

- Transmitancja operatorowa określa syntetycznie właściwości dynamiczne układu, nie zależy ani od sygnału wejściowego ani od sygnału wejściowego, a jedynie od parametrów układu
- Znając transmitancję układu można obliczyć przebieg odpowiedzi $y(t)$ układu na dowolne wymuszenie $u(t)$ następująco

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]$$

- Bieguny transmitancji operatorowej są pierwiastkami równania charakterystycznego równania różniczkowego układu, czyli wartościami własnymi układu

- Jeśli zamiast przekształcenia Laplace'a zastosujemy przekształcenie Fouriera, to zamiast transmitancji operatorowej otrzymamy transmitancję widmową

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

- Tramsmitancja widmowa jest związana z transmitancją operatorową zależnością

$$G(s)\Big|_{s=j\omega} = G(j\omega)$$

- W analizie układów dynamicznych najczęściej badana jest zależność modułu $|G(j\omega)|$ oraz fazy $\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)]$ transmitancji widmowej od częstotliwości
- Zależności te są nazywane charakterystykami częstotliwościowymi
- Dla układów dyskretnych opis transmitacyjny uzyskuje się poprzez zastosowanie przekształcenia $\mathcal{Z}$

Przestrzeń równań stanu

- Stan układu określany jest jako minimalna ilość informacji potrzebna do całkowitego określenia zachowania się układu przy danym sterowaniu
- Wektor stanu $\boldsymbol{x}$ jest elementem n-wymiarowej przestrzeni zwanej przestrzenią stanu
- W takim przypadku mamy do czynienia z obiektem dynamicznym n-tego rzędu
- W przestrzeni stanu obiekt opisany jest za pomocą tzw. równań stanu postaci:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) & \text{r-nie stanu} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) & \text{r-nie wyjścia (obserwacji)} \end{cases}$$

gdzie $\boldsymbol{x}$ – n-wymiarowy wektor stanu, $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$, $\boldsymbol{y}$ – p-wymiarowy wektor wyjścia, $\boldsymbol{u}$ – m-wymiarowy wektor sterowania, $\boldsymbol{f}$ – funkcja stanu, $\boldsymbol{g}$ – funkcja wyjścia

- Postać równań stanu zależy od wyboru zmiennych stanu
- Aby zmienne można było nazwać zmiennymi stanu, równania ułożone za ich pomocą muszą spełniać następujące warunki:
  1. dawać pełny i jednoznaczny opis dynamiki układu
  2. stanowić układ równań rzędu pierwszego
- W opisie układów elektrycznych jako zmienne stanu przyjmuje się wielkości fizyczne występujące w elementach czynnych jak ładunek czy napięcie na okładkach kondensatorów oraz prądy w cewkach
- Dla układu liniowego równania stanu przyjmują postać:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} & = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} & = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u} \end{cases} \tag{3}$$

  gdzie $\boldsymbol{A}$ – kwadratowa macierz stanu o rozmiarze $n \times n$, $\boldsymbol{B}$ – macierz sterowania o rozmiarze $n \times m$, $\boldsymbol{C}$ – macierz wyjściowa o rozmiarze $p \times n$ i $\boldsymbol{D}$ – macierz przejścia o rozmiarze $p \times m$
- Gdy macierze $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ posiadają elementy o wartościach stałe to układ jest stacjonarny

- Wartościami własnymi układu (3) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nazywa się rozwiązanie równania charakterystycznego układu postaci:

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \tag{4}$$

gdzie $\boldsymbol{I}$ – macierz jednostkowa

- Prawa strona równania (4) to wielomian charakterystyczny
- Wartości własne układu spełniają następujące równanie:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \tag{5}$$

- Wektor $\boldsymbol{x}_i$ będący rozwiązaniem równania (5) jest wektorem własnym układu
- W ogólnym przypadku wartości i składowe wektorów własnych mogą być liczbami zespolonymi
- Wektor własny nie może być wyznaczony całkowicie jednoznacznie – każdy wektor własny jest wyznaczany z dokładnością do czynnika multiplikatywnego (jeżeli $\boldsymbol{x}_i$ jest wektorem własnym odpowiadającym i-tej wartości własnej λ_i, to $a\boldsymbol{x}_i$ także jest wektorem własnym odpowiadającym i-tej wartości własnej λ_i)

Systemy o parametrach skupionych

- System, który posiada skończoną liczbę zmiennych stanu nazywa się systemem o stałych skupionych lub skończonego rzędu
- System, który posiada nieskończoną liczbę zmiennych stanu nazywa się systemem o stałych rozłożonych lub nieskończonego rzędu
- System opisany równaniem (1) jest skończonego rzędu jeśli istnieje skończona wartość n dla której równanie (1) jest spełnione; n nazywamy rzędem układu
- Dla opisu "wejście-wyjście" postaci

  $$y(t)^{(m)}=f(y(t), y(t)^{(1)}, \ldots, y(t)^{(m-1)}, x(t), x(t)^{(1)}, \ldots, y(t)^{(l)}, t)$$

  system jest systemem o stałych skupionych, gdy można znaleźć liczby m i l o skończonej wartości

- Systemy, w których opisie występują jednocześnie zmienne z opóźnieniem czasowym i bez opóźnienia są nieskończonego rzędu (o parametrach rozłożonych),
- W przypadku systemów dyskretnych, system jest skończonego rzędu jeśli jego równanie różnicowe ma postać:

  $$y[n]=f(y[n-1],y[n-2],...,y[n-m],x[n-1],x[n-2],...,x[n-l],n)$$

  gdzie m i l – liczby naturalne
- Przykłady systemów o stałych rozłożonych:
  - system iopisany równaniem różniczkowym

    $$\frac{dy(t)}{dt}+ay(t-1)=x(t)$$

  - blok opóźniający – $y(t)=x(n-T)$
  - system opisany równaniem różnicowym

    $$y[n]=\sum_{i}^{n}x[i]$$