Sygnały i systemy

Krzysztof Patan

Sygnały

- Z pojęciem sygnał spotykamy się w życiu codziennym, np. rozmowa telefoniczna, podczas której rozmówcy przekazują sobie informacje
- Sygnał akustyczny niosący informacje jest przetwarzany przez mikrofon na sygnał elektryczny
- W systemie telekomunikacyjnym, sygnał elektryczny może być przetworzony na cyfrowy, modulowany, demodulowany
- Rozmawiający traktują cały system telekomunikacyjny jako czarną skrzynkę; interesują ich tylko urządzenia końcowe: słuchawka i mikrofon

Sygnał jest funkcją niezależnych zmiennych, które zawierają informacje

Sygnały mogą opisywać zróżnicowane zjawiska:

- sygnały elektryczne – napięcie i prąd w układach elektrycznych
- sygnały akustyczne – sygnały audio i mowy, analogowe jak również cyfrowe
- sygnały wideo – zmiany intensywności w obrazie
- sygnały biologiczne – sekwencja w genotypie

Zmienne niezależne

- ciągłe
  - trajektoria lotu pocisku
  - elektrokardiogram człowieka
- dyskretne
  - sekwencja DNA
  - piksele obrazu cyfrowego
- jednowymiarowe $1 - D$, dwuwymiarowe $2 - D$, $\ldots$, $n - D$
- $\mathtt{czas}$ – pojedyncza zmienna $1 - D$
  - sygnały w czasie ciągłym: $x(t)$, t – zmienna ciągła
  - sygnały w czasie dyskretnym: $x[n]$, n – zmienna dyskretna (wartości całkowite)

Sygnały deterministyczne

sygnał deterministyczny – sygnał, którego pomiar w każdej chwili czasu daje w wyniku liczbę

- w praktyce każdy pomiar jest obarczony pewnym błędem, który ma chrakter losowy
- nie można z absolutną pewnością twierdzić że pomiar napięcia w danym urządzeniu elektrycznym wynosi 12V; jest to wartość najbardziej prawdopodobna, ale inne zbliżone do 12V wartości są możliwe do uzyskania w trakcie pomiaru z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa

Sygnały stochastyczne

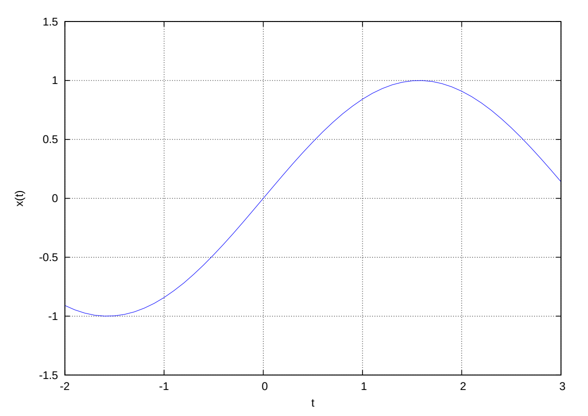
sygnał stochastyczny – sygnał w każdej chwili czasu jest opisywany zmienną losową o znanych statystykach

- wykład *Sygnały i systemy dynamiczne* ogranicza się do sygnałów deterministycznych

Sygnał ciągły w czasie

- Większość rzeczywistych sygnałów ma charakter ciągły, np. napięcie i prąd elektryczny, ciśnienie, temperatura, prędkość

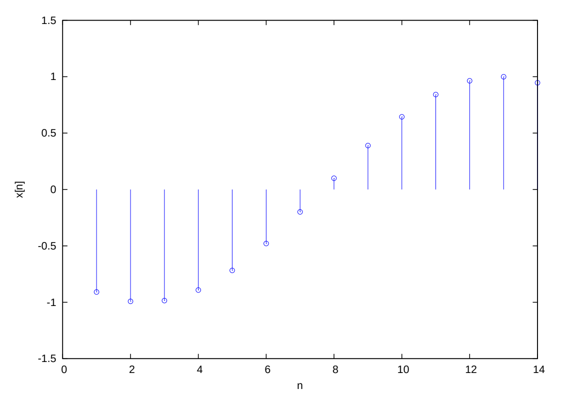
Przykład



Sygnał dyskretny w czasie

- $x[n]$, n - liczba całkowita, czas zmienia sie w sposób dyskretny
- Przykład naturalnego sygnału dyskretnego: sekwencja DNA
- Sygnały dyskretne mogą być przetwarzane przez komputery oraz cyfrowe procesory sygnałowe

Przykład

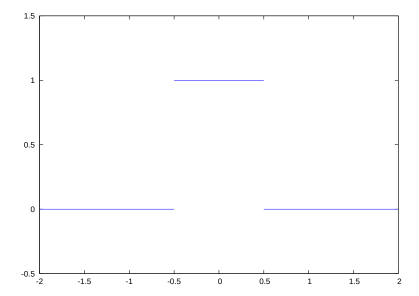


Sygnały podstawowe

Impuls prostokątny

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad |t| < T \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > T \end{cases}$$

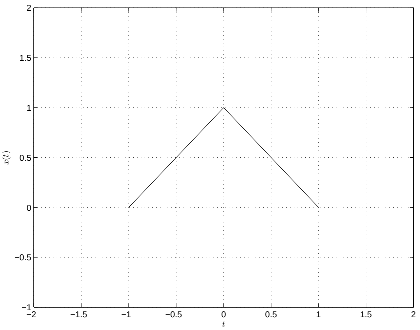
Impuls postokątny – wykres



Impuls trójkątny

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{dla} \quad |t| \leqslant 1 \\ 0 & \text{dla} \quad |t| > 1 \end{cases}$$

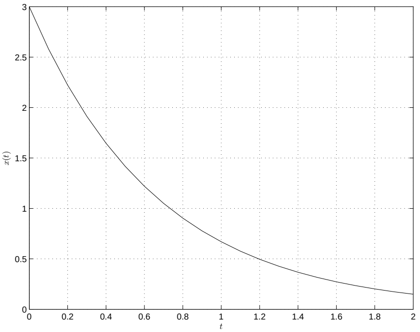
Impuls trójkątny – wykres



Sygnał malejący wykładniczo

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-at} & \text{dla} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t < 0 \end{cases}$$

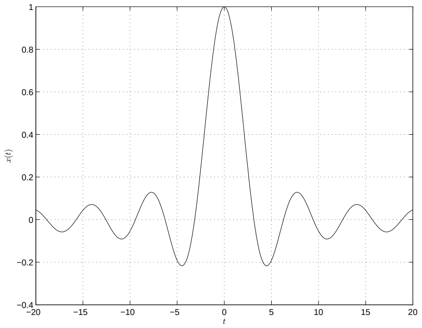
Sygnał wykładniczy – wykres $(A = 3,\ a = 1.5)$



Sygnał $\sin(t)/t$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & \text{dla} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{dla} \quad t = 0 \end{cases}$$

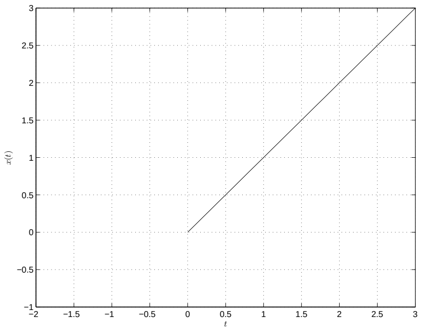
Sygnał $\sin(t)/t$ – wykres



Sygnał rampowy

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{dla} \quad t \geqslant 0 \\ 0 & \text{dla} \quad t < 0 \end{cases}$$

Sygnał rampowy – wykres



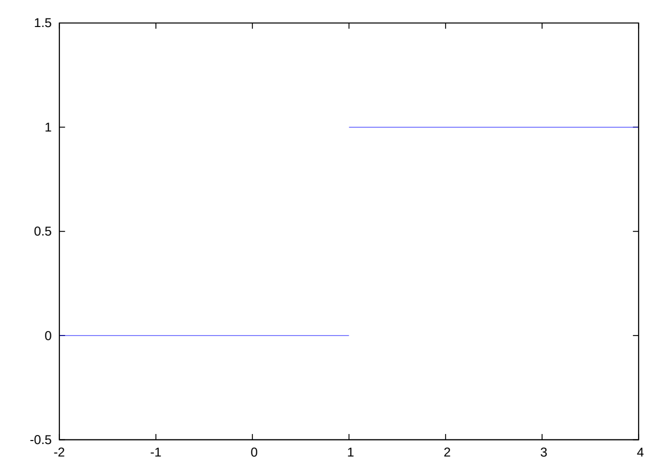
Skok jednostkowy

- Definicja

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t < t_0 \\ 1 & \text{dla} \quad t \geqslant t_0 \end{cases}$$

- Gdy stosunek sygnału do szumu jest duży, skok jednostkowy dostarcza cennych informacji o dynamice badanego systemu
- Parametry systemu takie jak: czas narastania, przeregulowanie, współczynnik wzmocnienia zależą wprost od odpowiedzi skokowej
- Pewne parametry systemu, np. częstotliwosci rezonansowe mogą być estymowane na podstawie odpowiedzi skokowej
- Istnieje takżę werjsa dyskretna sygnału $\mathbf{1}[n]$

Skok jednostkowy – wykres



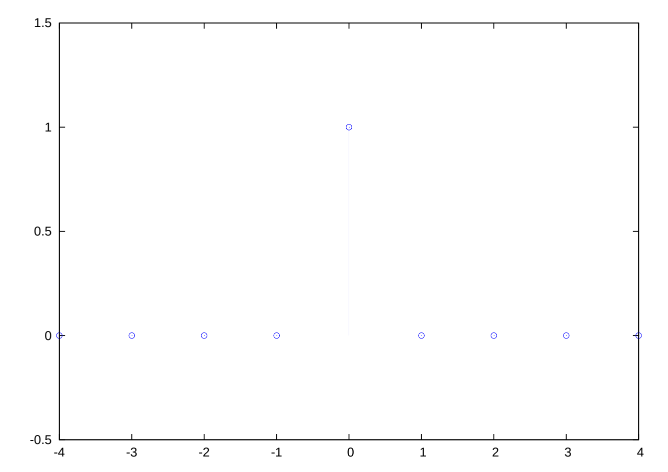
Delta Kroneckera (impuls jednostkowy)

- Definicja

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad n = 0 \\ 0 & \text{dla} \quad n \neq 0 \end{cases}$$

- Delta Kroneckera odgrywa podstawową rolę w teorii sygnałów czasu dyskretnego

Delta Kroneckera – wykres



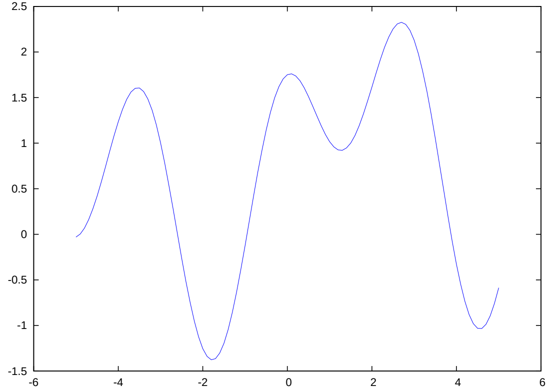
Pseudolosowy ciąg binarny

- Definicja – sygnał, który przełącza się w określony sposób między dwiema różnymi wartościami
- Pseudolowy ciąg binarny – PRBS, *ang.* PseudoRandom Binary Sequence
- Jest to sygnał okresowy – okres wybiera się tak, aby był tego samego rzędu co liczba próbek w eksperymencie lub większy

Suma sygnałów sinusoidalnych

- Definicja
$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$$
gdzie a_i – amplituda, ω_i – częstotliwość, φ_i – faza
- Częstotliwosci spełniają relację
$$0 \leqslant \omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_m \leqslant \pi$$
- Składnik z $\omega_1 = 0$ odpowiada stałej $a_1 \sin(\varphi_1)$
- Składnik z $\omega_m = \pi$ oscyluje z okresem równym dwóm przedziałom próbkowania

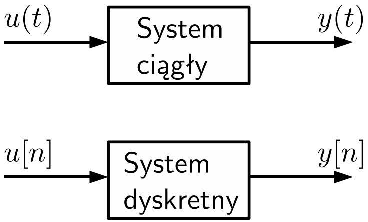
Przykład $u(t) = \sin(t) + \sin(2t + 2) + \sin(0.2t + 1)$



Systemy

- W naukach technicznych próbuje się wyjaśniać oraz wykorzystywać skomplikowane zjawiska fizyczne i badać występujące w nich związki przyczynowo-skutkowe
- Powstają modele rozważanych zjawisk
- Modele zjawisk nazywa się *systemami*
- Przyczyna jest reprezentowana przez sygnał wejściowy
- Skutek jest reprezentowany przez sygnał wyjściowy (odpowiedź systemu)

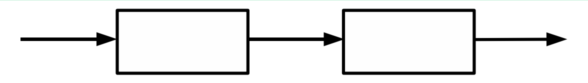
- W większości przypadków systemy rozpatruje się z punktu widzenia sygnałów wejściowych i wyjściowych
- System odpowiada na zadany sygnał wejściowy (pobudzenie) jednym lub więcej sygnałami wyjściowymi
- Przykłady



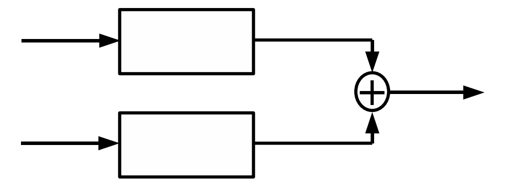
Połączenia systemów

- Skomplikowane systemy można budować za pomocą wielu prostych sytemów
- Można wpływać na odpowiedź systemu poprzez odpowiednie zestawienie systemów

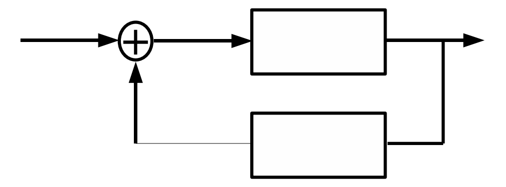
Połączenie szeregowe (kaskadowe)



Połączenie równoległe

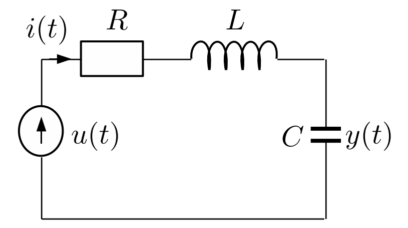


Połączenie ze sprzężeniem zwrotnym



Przykłady systemów

1. Obwód RLC



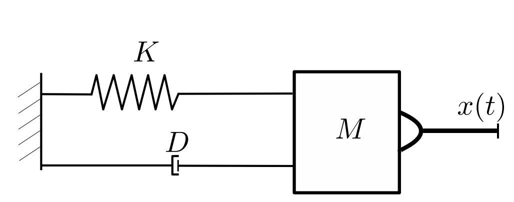
$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

$$i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

2. System mechaniczny



K – stała sprężyny
D – współczynnik tłumienności
$x(t)$ – przyłożona siła
$y(t)$ – przesunięcie

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = x(t) - Ky(t) - D\frac{dy(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + D\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = x(t)$$

3. System finansowy

$t = 0$ – czas kupna w cenie y_0
$t = T$ – czas wyprzedaży w cenie y_T
$y(t)$ – wartość zobowiązań w czasie t
$x(t)$ – wpływ zewnętrznych czynników na fluktuacje ceny oblikacji

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = f\left(y(t), \frac{y(t)}{dt}, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_N(t), t\right)$$

$$y(0) = y_0, \quad y(T = y_T)$$

4. Prosty detektor nachylenia

$$
\begin{aligned}
y[n]) &= x[n+1] - 2x[n] + x[n-1] \\
&= \{x[n+1] - x[n]\} - \{x[n] - x[n-1]\} \\
&= \text{różnica 2-go rzędu}
\end{aligned}
$$

System wykrywa zmiany współczynnika nachylenia sygnału

$$\text{(a)} \quad x[n] = n \quad \Rightarrow \quad y[n] = 0$$

$$\text{(b)} \quad x[n] = nx[n] \quad \Rightarrow \quad y[n]$$

Wnioski

- Bogata klasa systemów możę być reprezentowana przez równania różniczkowe (czas ciągły) bądź różnicowe (czas dyskretny)
- Równania różnicowe i różniczkowe nie opisują w kompletny sposób zachowania wejście/wyjście systemu; istnieje potrzeba wprowadzenia pomocniczych warunków (warunki początkowe, warunki ograniczające, itp.)
- Wiele odmiennych systemów fizycznych może posiadać podobny opis matematyczny