Kompensacja wyprzedzająca i opóźniająca fazę

dr hab. inż. Krzysztof Patan, prof. PWSZ

Kształtowanie charakterystyki częstotliwościowej

Kształtujemy charakterystykę układu otwartego aby uzyskać:

- pożądane (duże) wzmocnienie w zakresie niskich częstotliwości, aby minimalizować błąd w stanie ustalonym i minimalizację wpływu zakłóceń
- odpowiednią częstotliwość graniczną wzmocnienia, aby otrzymać pożądane pasmo przenoszenia (szybkość odpowiedzi)
- odpowiednie zapasy fazy i wzmocnienia

Kompensator wyprzedzający

Transmitancja

$$C(s) = \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T}$$

gdzie $\alpha < 1$

Zadanie

Dobrać parametry α i T tak, aby uzyskać dla układu otwartego założony zapas fazy $PM = \varphi$. Dzięki temu możliwa będzie redukcja oscylacji na wykresie odpowiedzi skokowej

Własności kompensatora

- maksymalne przesuniecie fazy w przód to

$$\phi_m = \sin^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$$

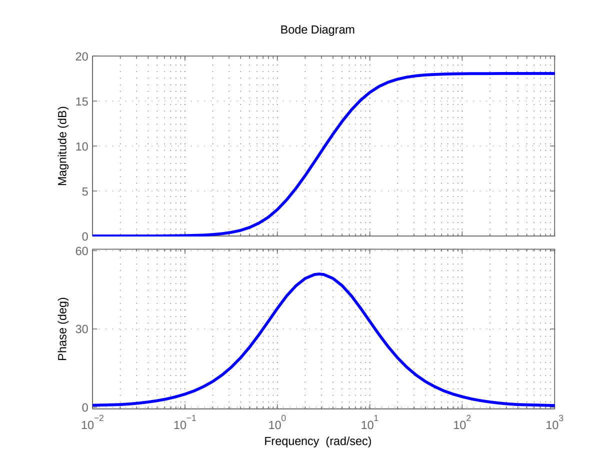
- częstotliwość maksymalnego przesuniecia fazy w przód

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$$

- maksymalne wzmocnienie dla ω_m wynosi

$$20\log(\sqrt{\alpha}) = 10\log(\alpha)$$

Kompensator wyprzedzający $(T = 1, \alpha = 0.125)$



Własności c.d.

- $\frac{1}{T} \leqslant \omega_m \leqslant \frac{1}{\alpha T}$
- maksymalne wzmocnienie dla ω_m to połowa sumy wzmocnienia początkowego i końcowego
- w praktyce można użyć tabeli

α	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/8	1/10
ϕ_m	19.5	30	38.9	41.8	45.6	51.1	54.9
G_m[dB]	3.01	4.77	6.02	6.99	7.78	9.03	10.0

Procedura projektowania dla wymaganego PM=φ

1. wyznacz zapas fazy układu bez kompensatora ϕ
2. biorąc pod uwagę margines bezpieczeństwa ϵ, określ wymagany zapas fazy do uzyskania przez kompensator

   $$\phi_m = \varphi - \phi + \epsilon$$

   gdzie $\epsilon = 5 \div 18$
3. Dobierz parametr α z odpowiednich równań lub tabeli
4. Wyznacz wartość $10 \log \alpha$ (albo odczytaj z tabeli) i określ częstotliwość gdzie wzmocnienie układu bez kompensatora jest $-10 \log \alpha$ [dB]. Ta częstotliwość to ω_{BW}
5. wykreśl wykresy Bodego i ewentualnie powtórz całą procedurę

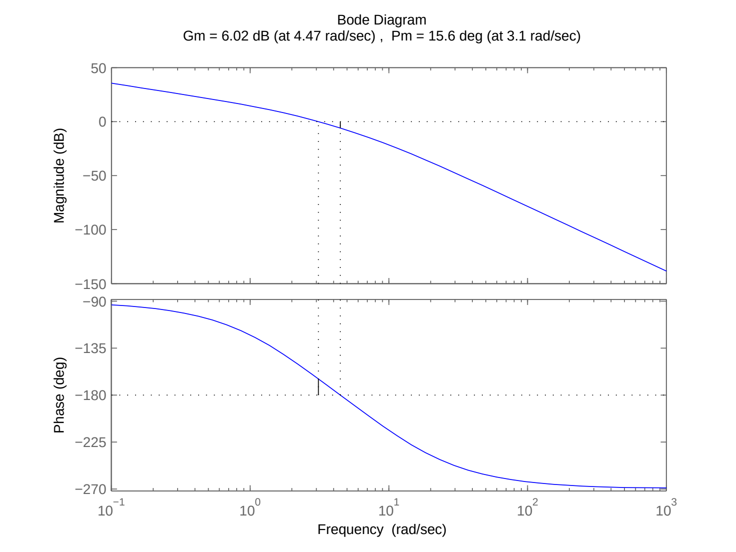
Przykład 1

Dana jest transmitancja obiektu

$$G(s) = \frac{6}{s(1+0.5s)(1+0.1s)}$$

Dla tego obiektu:

- Zapas fazy jest mały, PM$=15^o$
- Pożądane jest zwiększenie PM do ok. 40^o (przeregulowanie $\eta = 25\%$)


Bode Diagram
Gm = 6.02 dB (at 4.47 rad/sec) , Pm = 15.6 deg (at 3.1 rad/sec)
Magnitude (dB)
50
0
−50
−100
−150
Phase (deg)
−90
−135
−180
−225
−270
10^−1
10^0
10^1
10^2
10^3
Frequency (rad/sec)

Projektowanie kompensatora

- Wymagane przesuniecie fazowe to ok. 40^o

$$(40 - 15.6 + \epsilon) = 40 \text{ gdy } \epsilon = 15.6$$

  kompensator przesuwa fazę o 40^o dla $\epsilon = 15.6$
- $\epsilon = 5 \div 10^o$ dla obiektów względnego stopnia 2, $\epsilon = 12 \div 18^o$ dla obiektów względnego stopnia 3
- Z tabeli α może być $1/4$ lub $1/5$. Arbitralnie wybieramy $\alpha = 1/5$ czyli $\epsilon = 17.4$ i wzmocnienie to $6.99dB$

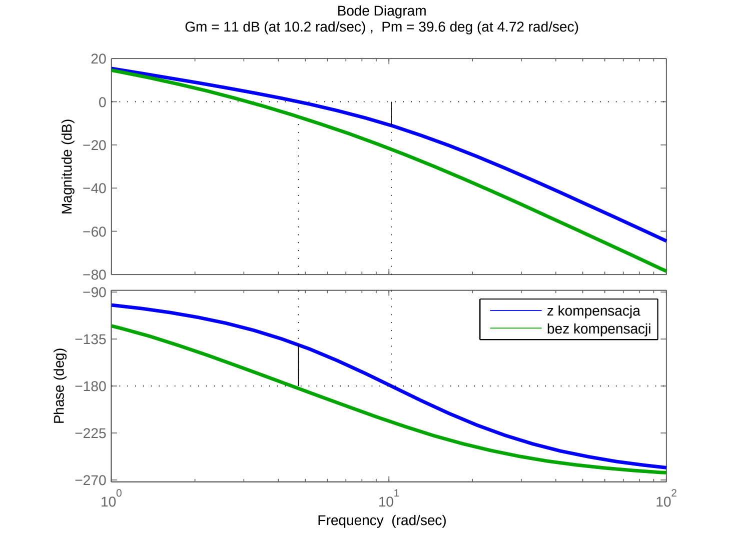
- Z charakterystyki Bodego odczytujemy, że $|G(j\omega)| \simeq -7$[dB] dla $\omega = 4.74$
- Oznacza to, że

$$4.74 = \frac{1}{T\sqrt{1/5}} \text{ czyli } T = 0.472$$

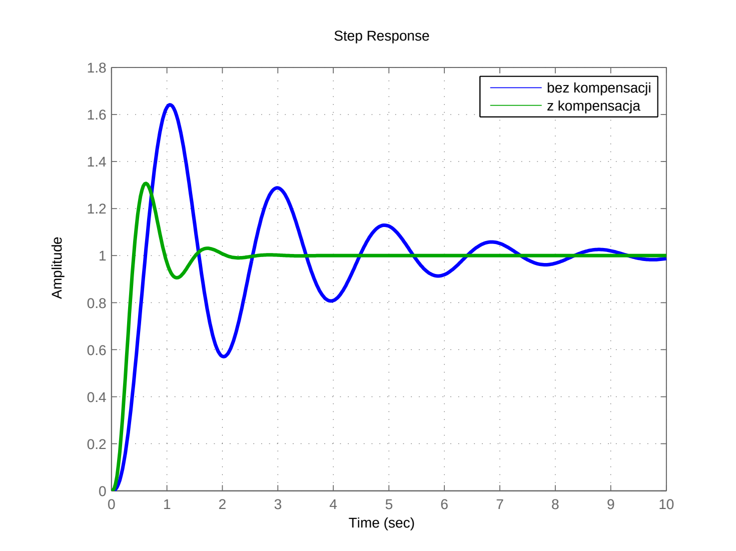
- Transmitancja kompensatora to

$$C(s) = \frac{1 + 0.472s}{1 + 0.094s}$$

Charakterystyki częstotliwościowe



Charakterystyki skokowe



Projektowanie metodą analityczną

Cel metody

Wymagane jest, aby układ otwarty $C(s)G(s)$ miał wzmocnienie $|C(s)G(s)| = 1$ i przesunięcie fazowe $\varphi - 180^o + \mathrm{PM}$ dla częstotliwości $s = j\omega_{gc}$

$$C(j\omega_{gc})G(j\omega_{gc}) = K_c \frac{j\omega_{gc}\tau_z + 1}{j\omega_{gc}\tau_p + 1} M_G e^{j\theta_G} = 1e^{j(-180+\mathrm{PM})}$$

gdzie M_G to wzmocnienie (ale nie w dB) i θ_G to faza $G(j\omega)$ dla $\omega = \omega_{gc}$

Rozwiązanie

Dokonując separacji równania na część rzeczywistą i urojoną otrzymujemy dwa równania z dwiema niewiadomymi: τ_z i τ_p

Rozwiązanie:

$$\tau_z = \frac{1 + K_c M_G \cos(PM - \theta_G)}{-\omega_{gc} K_c M_G \sin(PM - \theta_G)}$$

$$\tau_p = \frac{\cos(PM - \theta_G) + K_C M_G}{\omega_{gc} \sin(PM - \theta_G)}$$

Przykład 2

Dany jest obiekt

$$G(s) = \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)}$$

Należy zaprojektować kompensator wyprzedzający tak aby uzyskać następujące wskaźniki jakościowe:

- $e_{ss_{ramp}} \leqslant 10\%$ - błąd w stanie ustalonym dla sygnału liniowo narastającego
- $\omega_{gc} = 14 rad/sec$
- $PM = 45^o$

Błąd w stanie ustalonym

$$e_{ss_{ramp}} = \frac{1}{K_v} \text{ gdzie } K_v = \lim_{s \to 0} s(K_c G)$$

Aby $e_{ss_{ramp}} \leqslant 0.1$ to $K_v = 10$. Oznacza to, że $K_c = 5$, gdyż

$$\lim_{s \to 0} s(G) = \frac{400}{200} = 2$$

Dla $\omega = \omega_{gc} = 14 rad/sec$

- $M_G = 0.068$
- $\theta_G = -180^o$

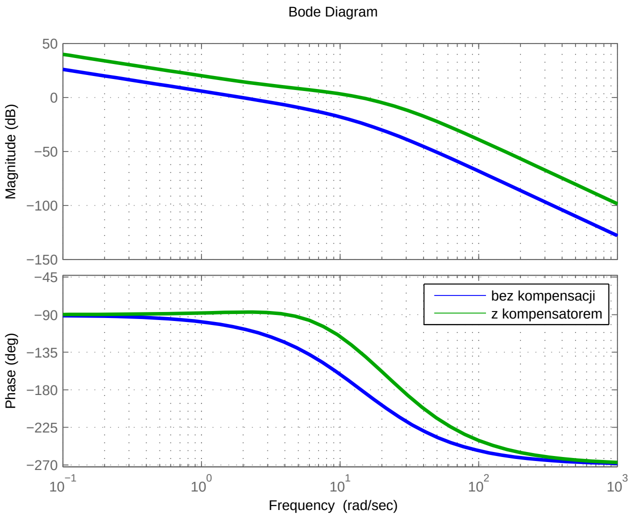
Wyniki obliczeń:

- $\tau_z = 0.227$
- $\tau_p = 0.038$

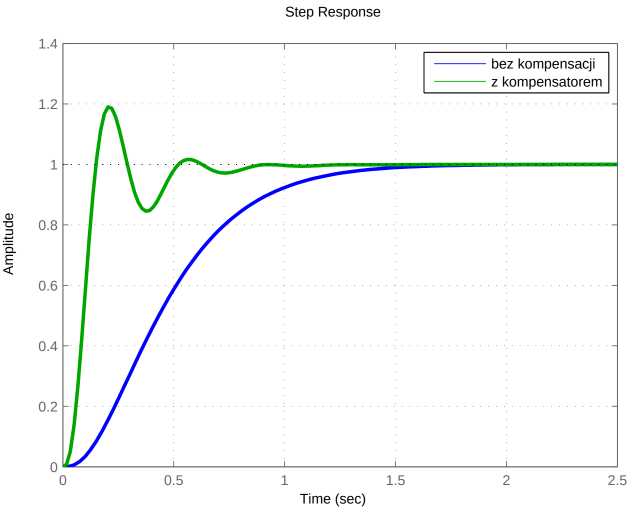
Transmitancja kompensatora

$$C(s) = 5\frac{0.227s + 1}{0.038s + 1}$$

Charakterystyki Bodego



Charakterystyki skokowe



Regulator PD vs kompensator wyprzedzający

Idealny i rzeczywisty regulator PD

$$PD_i(s) = K_p + K_d s \qquad\qquad PD_r(s) = K_p + \frac{K_d s}{T_d s + 1}$$

W przypadku rzeczywistego PD

$$PD_r(s) = K_p \frac{\left(T_d + \frac{K_d}{K_p}\right) s + 1}{T_d s + 1}$$

Wnioski:

- regulator rzeczywisty PD ma postać podobną do kompensatora wyprzedzającego
- regulator idealny PD nie ma biegunów

Kompensator opóźniający

Transmitancja

$$C(s) = \frac{1 + sT}{1 + s\alpha T}$$

gdzie $\alpha > 1$

Własności:

- wprowadza opóźnienie, więc zmniejsza PM (tendencja destabilizacji)
- niestosowany w przypadku układów niestabilnych
- zmniejsza błąd w stanie ustalonym
- zmniejsza częstotliwość graniczną wzmocnienia (ω_{gc}) – spowolnienie odpowiedzi układu

Projektowanie metodą analityczną

Cel metody

wymagane jest, aby układ otwarty $C(s)G(s)$ miał wzmocnienie $|C(s)G(s)| = 1$ i przesunięcie fazowe $\varphi - 180^o + \mathrm{PM}$ dla częstotliwości $s = j\omega_{gc}$

$$K(j\omega_{gc})G(j\omega_{gc}) = K_c \frac{j\omega_{gc}\tau_z + 1}{j\omega_{gc}\tau_p + 1} M_G e^{j\theta_G} = 1e^{j(-180+\mathrm{PM})}$$

gdzie M_G to wzmocnienie (ale nie w dB) i θ_G – faza $G(j\omega)$ dla $\omega = \omega_{gc}$

Dokonując separacji równania na część rzeczywistą i urojoną otrzymujemy dwa równania z dwiema niewiadomymi: τ_z i τ_p

Rozwiązanie:

$$\tau_z = \frac{1 + K_c M_G \cos(PM - \theta_G)}{-\omega_{gc} K_c M_G \sin(PM - \theta_G)}$$

$$\tau_p = \frac{\cos(PM - \theta_G) + K_C M_G}{\omega_{gc} \sin(PM - \theta_G)}$$

Przykład 3

Dany jest obiekt

$$G(s) = \frac{10}{s(s+5)}$$

Należy zaprojektować kompensator opóźniający, tak aby uzyskać następujące wskaźniki jakościowe:

- $e_{ss_{ramp}} \leqslant 5\%$ - błąd w stanie ustalonym dla sygnału liniowo narastającego
- $\omega_{gc} = 2rad/sec$
- $PM = 40^o$

Błąd w stanie ustalonym

$$e_{ss_{ramp}} = \frac{1}{K_v} \text{ gdzie } K_v = \lim_{s \to 0} s(K_c G)$$

Aby $e_{ss_{ramp}} \leqslant 0.05$ to $K_v = 20$. Oznacza to, że $K_c = 10$, gdyż

$$\lim_{s \to 0} s(G) = \frac{10}{5} = 2$$

Dla $\omega = \omega_{gc} = 2$[rad/sec]

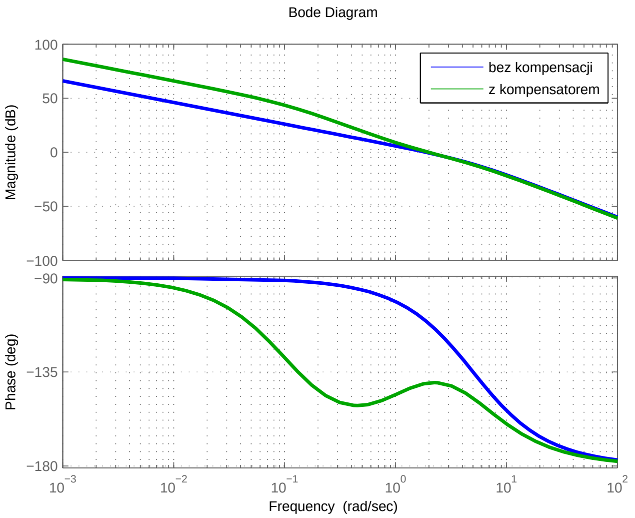
- $M_G = 0.9285$
- $\theta_G = -111.8014^o$

Wyniki obliczeń:

- $\tau_z = 0.8186$
- $\tau_p = 8.8920$

Transmitancja kompensatora

$$C(s) = 10\frac{0.8186s + 1}{8.8920s + 1}$$


Bode Diagram
100
50
0
−50
−100
Magnitude (dB)
bez kompensacji
z kompensatorem
−90
−135
−180
Phase (deg)
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/sec)

Regulator PI vs kompensator opóźniający

Transmitancja idealnego regulatora PI

$$PI(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

Sprowadzając do wspólnego mianownika otrzymujemy

$$PI(s) = \frac{K_p s + K_i}{s} = K_p \frac{s + \frac{K_i}{K_p}}{s}$$

Wnioski:

- Transmitancja regulatora PI jest podobna do kompensatora opóźniającego
- Regulator PI ma biegun w zerze