Projektowanie układów regulacji w dziedzinie częstotliwości

dr hab. inż. Krzysztof Patan, prof. PWSZ

Wprowadzenie

Metody projektowania w dziedzinie częstotliwości mają wiele zalet:

- stabilność i wymagania jakościowe są prezentowane na tym samym wykresie
- można używać rzeczywistych pomiarów zamiast modelu w formie transmitancji
- projektowanie jest niezależne od rzędu układu
- regulatory dla układów z opóźnieniami mozna projektować bez większych trudności
- metody graficzne (analiza i synteza z użyciem odpowiednich diagramów) jest relatywnie łatwa

Układ pierwszego rzędu

Rozważmy system opisany transmitancją

$$G(s) = \frac{a}{s+a}$$

Własności:

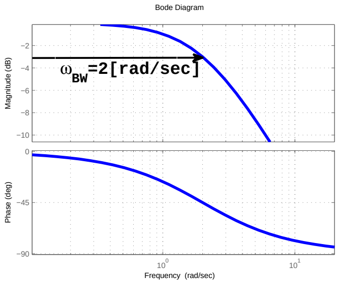
- Jeden biegun $(s = -a)$
- Pasmo przenoszenia $\omega_{\mathrm{BW}} = |a|$
- Odpowiedź skokowa

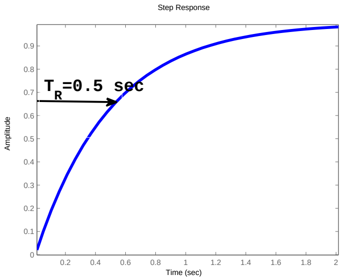
$$Y(s) = \frac{1}{s}\frac{a}{s+a} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a}$$

$$y(t) = (1 - e^{-at})\mathbf{1}(t)$$

Przykładowa transmitancja

$$G(s) = \frac{2}{s+2}$$





częstotliwość graniczna: przegięcie charakterystyk amplitudowej i fazowej

stała czasowa: punkt przecięcia stycznej do odpowiedzi w punkcie zero z linią maksymalnego wzmocnienia

Układ drugiego rzędu

Rozważmy system opisany transmitancją

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

gdzie

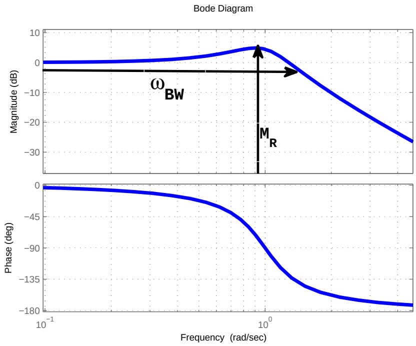
- ζ - współ. tłumienia względnego
- ω_n - pulsacja drgań własnych (nietłumionych)
- lokalizacja biegunów

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

- dla $\zeta > 1$ oba bieguny są rzeczywiste
- dla $\zeta = 1$ oba bieguny są identyczne i rzeczywiste
- dla $0 < \zeta < 1$ bieguny są zespolone i sprzężone.

Charakterystyki częstotliwościowe dla przykładowego systemu

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1}$$



Własności układu

- pulsacja rezonansowa (dla $\zeta \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$\omega_R = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$$

- Moduł rezonansowy (dla $\zeta \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$)

$$M_R = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

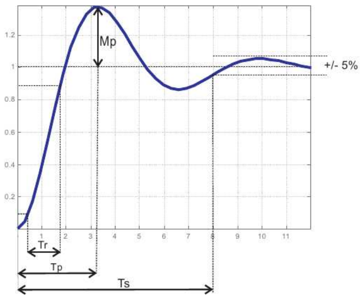
- pasmo przenoszenia

$$\omega_{BW} = \omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}}$$

Dla $0 < \zeta < 1$ to $0.64\omega_n < \omega_{BW} < 1.55\omega_n$.
Dla $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ to $\omega_{BW} = \omega_n$.

Odpowiedź skokowa dla systemu

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.6s + 1}$$



- M_P - wartość (moduł) przeregulowania

  $$POS = 100[(M_P - y(\infty))/y(\infty)]$$

- T_P - czas max. przeregulowania
- T_S - czas regulacji
- T_R - czas narastania

Odpowiedź skokowa (dziedzina częstotliwości)

$$Y(s) = \frac{1}{s}G(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_n^2(1 - \zeta^2)}$$

Odpowiedź skokowa (dziedzina czasu)

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-t/\tau}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \cos(\omega_d t - \varphi_d), \quad t > 0$$

gdzie

- $|\sigma| = \zeta\omega_n$ - tłumienie względne
- $\tau = 1/|\sigma|$ - stała czasowa
- $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$ - pulsacja tłumiona
- $\varphi = \sin^{-1}\zeta$

Pasmo przenoszenia

Zakres częstotliwości, dla których wzmocnienie układu zamkniętego nie spada poniżej $= -3$dB.

Częstotliwość, dla której wzmocnienie spada o -3 dB nazywamy częstotliwością graniczną

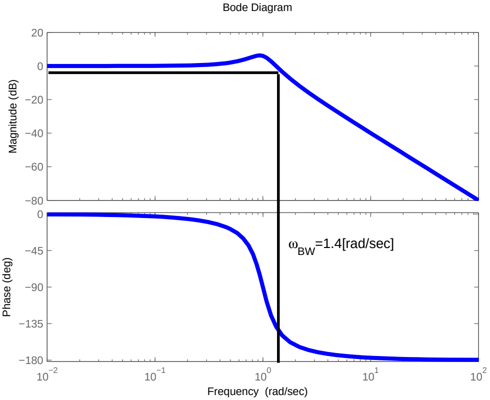
Korzystając z metod odpowiedzi częstotliwościowej oczekujemy określenia odpowiedzi układu zamkniętego na podstawie odpowiedzi układu otwartego.

Na podstawie odpowiedzi układu 2-go rzędu, możemy przyjąć, iż częstotliwość graniczna odpowiada częstotliwości, dla której wzmocnienie układu otwartego jest pomiędzy -6 i -7.5dB (przyjmując, że przesuniecie fazowe dla tego wzmocnienia jest pomiędzy -135^o i -225^o)

Przykład

Transmitancja układu zamkniętego

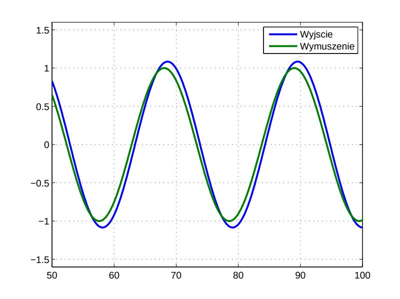
$$G_{\text{cl}} = \frac{1}{s^2 + 0.5s + 1}$$



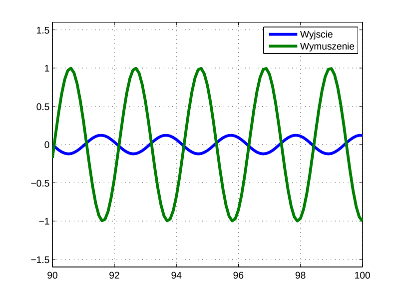
Pasmo przenoszenia

Przykład – cd

dla $\omega < \omega_{BW}$



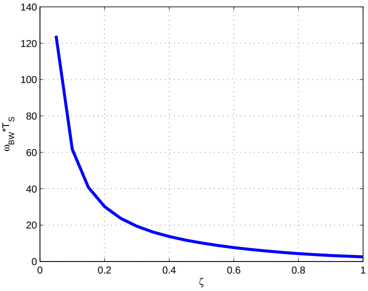
dla $\omega > \omega_{BW}$



Relacje ze współczynikiem tłumienia (ζ) i czasem ustalania(T_S)

$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4 * \zeta^2 + 2}}$$

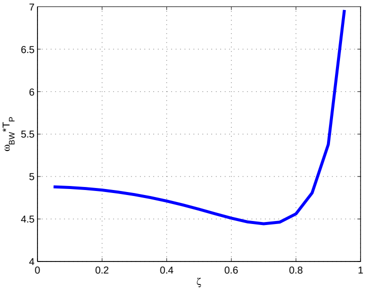
$$\omega_n = \frac{4}{T_s \zeta}$$



Relacje ze współczynikiem tłumienia (ζ) i czasem max. przeregulowania (T_P)

$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4 * \zeta^2 + 2}}$$

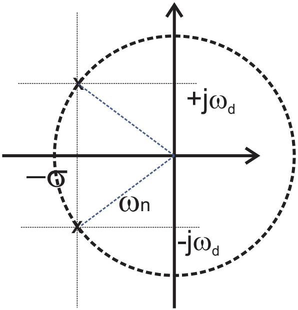
$$\omega_n = \frac{\pi}{T_p\sqrt{1-\zeta^2}}$$



Wpływ zmian położenia biegunów

Dla danej transmitancji

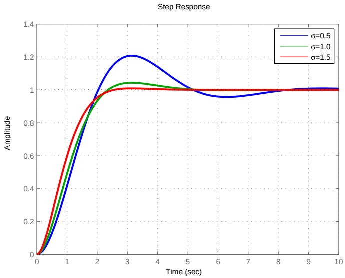
$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_d^2 + \sigma^2}{s^2 + 2\sigma s + \omega_d^2 + \sigma^2}$$

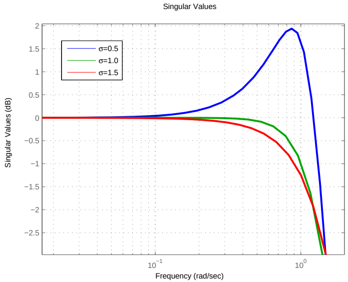


- $s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$
- $\theta = \cos^{-1}\zeta$
- $\zeta = \cos\theta$

Wpływ zmian σ

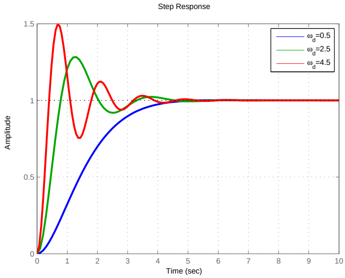
$\omega_d = 1,\ \sigma = \{0.5, 1, 1.5\}$

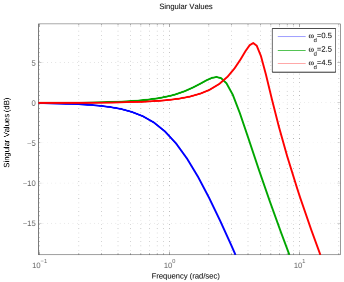




Wpływ zmian ω_d

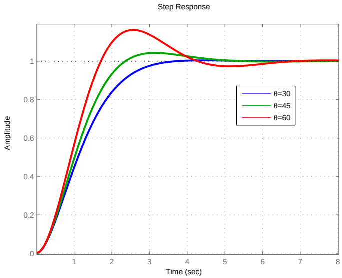
$\sigma = 1,\ \omega_d = \{0.5, 2.5, 4.5\}$

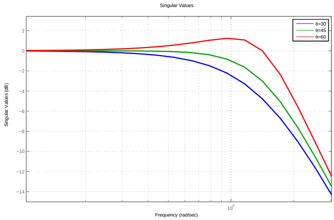




Wpływ zmian ζ

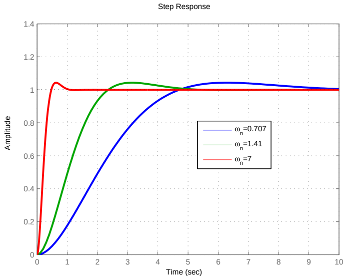
$$\omega_n = \sqrt{2},\ \theta = \{30, 45, 60\}$$

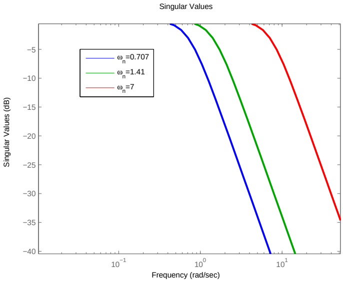




Wpływ zmian ω_n

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \omega_n = \{\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, 5\sqrt{2}\}$$





Stabilność w dziedzinie częstotliwości

Problem

Czy badając transmitancję w otwartej pętli $L(s) = K(s)G(s)$ możemy ustalić stabilność układu zamkniętego?

$$G_{\mathrm{cl}} = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

Uwagi:

- Łatwo rozwiązać powyższy problem korzystając z linii pierwiastkowych
- Jak znaleźć warunek w dziedzinie częstotliwości odpowiadający ulokowaniu wszystkich biegunów w lewej półpłaszczyźnie zespolonej?

Zapas wzmocnienia i fazy

Zapas wzmocnienia

Zmiana wzmocnienia w układzie otwartym $(K(s)G(s))$ powodująca niestabilność układu zamkniętego. Układy z większym zapasem wzmocnienia są bardziej odporne na zmiany parametrów układu mogące spowodować niestabilność układu zamkniętego.

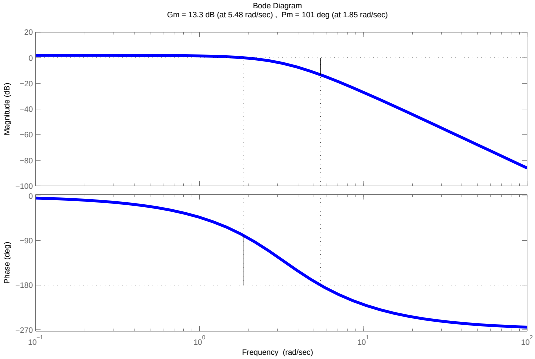
Zapas fazy

Zmiana fazy w układzie otwartym $(K(s)G(s))$ powodująca niestabilność układu zamkniętego.

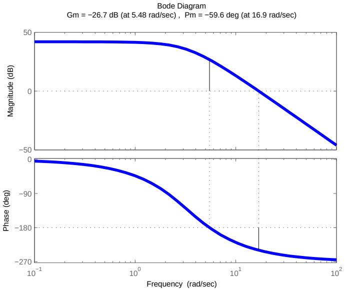
Zapas fazy określa tolerancję układu na opóźnienia. Opóźnienia większe niż $180/\omega_{pc}$ (ω_{pc} - częstotliwość przy którym przesunięcie fazowe $= 180^o$) powodują niestabilność układu zamkniętego.

Przykład

$$K(s) = 50, G(s) = \frac{1}{s^3 + 9s^2 + 30s + 40}$$



Zmieniając wzmocnienie układu ($K(s) = 5000(100\times)$) nie musimy kreślić nowego wykresu Bodego, aby odczytać zapas fazy. Wystarczy na utworzonym już wykresie sprawdzić zapas fazy dla -40dB (40dB odpowiada wzmocnieniu 100 razy).

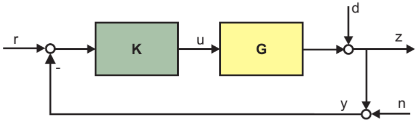


Wskaźniki jakościowe

Określanie wskaźników jakościowych układu zamkniętego:

- musimy zapewnić stabilność układu otwartego jeśli będziemy używać diagramów Bode'go.
- sprawdzamy czy $\omega_{gc} < \omega_{pc}$) aby stwierdzić czy układ zamknięty będzie stabilny.
- dla układu 2-ego rzędu , współczynnik tłumienia (układu zamkniętego) jest w przybliżeniu równa PM/100 (jeśli PM$= 0 \div 60^o$.
- dla układu 2-ego rzędu, istnieją zależności pomiędzy współczynikiem tłumienia, pasmem przenoszenia i czasem ustalania .
- w przybliżeniu możemy przyjąć że pasmo przenoszenia będzie równe częstotliwości drgań własnych.

Układ regulacji ze sprzężeniem zwrotnym



Definicje sygnałów

- r - sygnał referencyjny
- d - zakłócenia
- n - szum czujników
- z - regulowane wyjście
- y - mierzone wyjście

Problem: **Uzyskanie najmniejszego błędu regulacji $(r - z)$**

Wyjście układu

$$Z(s) = \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)}R(s) + \frac{1}{1+K(s)G(s)}D(s) - \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)}N(s)$$

Definiując bład regulacji $e = r - z$ otrzymujemy

$$E(s) = \frac{1}{1+K(s)G(s)}R(s) - \frac{1}{1+K(s)G(s)}D(s) + \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)}N(s)$$

oraz

$$U(s) = \frac{K(s)}{1+K(s)G(s)}\left(R(s) - D(s) - N(s)\right)$$

Ograniczenia sterowania

Można pokazać, że

$$e = r - z = S(r - d) + Tn$$

gdzie

$S(s) = (1+G(s)K(s))^{-1};\ \ T(s) = 1-S(s) = (1+G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s$

Głowne cele sterowania

- Dobre śledzenie sygnału referencyjnego (dla niskich częstotliwości $< \omega_{BW}$)

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1 \Leftrightarrow |S(j\omega)| \ll 1 \ \ or \ \ |T(jw)| \simeq 1$$

- Dobre tłumienie zakłóceń (dla wysokich częstotliwości)

$$|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1 \Leftrightarrow |T(j\omega)| \ll 1$$

Cele i ograniczenia regulacji (sterowania)

Cel regulacji

Zaprojektować regulator K tak aby błąd regulacji pozostawał mały. Oznacza to, że będziemy dążyć aby S i T były małe w tych zakresach częstotliwości gdzie spektrum sygnałów r i n są małe.

Ograniczenia

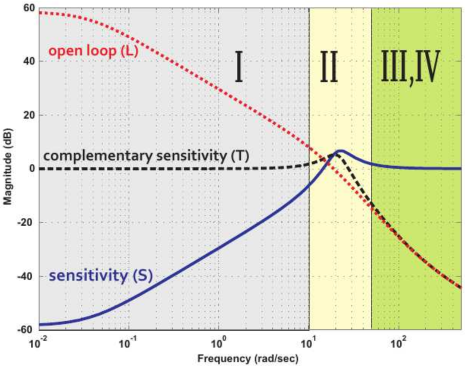
- $S + T = 1$ (błąd e nie może być mały dla wszystkich czestotliwości)
- $\int_0^\infty \log |S(j\omega)| d\omega = 0$ - jakość sterowania (ang. *performance*) vs. odporność (ang. *robustness*)

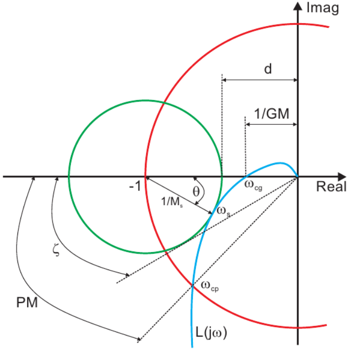
I Sygnał z musi śledzić r (ang. *tracking*).

II Odporność na zmiany parametrów układu.

III Tłumić wpływ zakłóceń (oraz niemodelowanej dynamiki)

IV Tłumić wpływ szumu pomiarowego n





$$M_s = \|S(j\omega)\|_\infty$$

$$d = 1 - \frac{1}{M_s}$$

$$PM \geqslant \zeta = 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{M_s}\right)$$

$$GM \geqslant \frac{1}{d} = \frac{M_s}{M_s - 1}$$

Czyli

$$M_s < 2 \Leftrightarrow GM > 2 \text{ i } PM > 30^o$$