Dynamika układów hydraulicznych

dr hab. inż. Krzysztof Patan

Wprowadzenie

- Modele układów hydraulicznych opisują mechanikę ruchu cieczy w obwodach zawierających zbiorniki i elementy przepływowe w postaci rur,zaworów, zwężek
- Ciecze poruszają się pod wpływem sił, np. siły grawitacji lub różnicy ciśnień item **Natężenie przepływu** $f(t)$ – szybkość przepływu cieczy przez dany przekrój obiektu
    - jednostka objętości na jednostkę czasu [m^3/s]
    $$f(t) = \frac{dV}{dt}$$
    - jednostka masy na jednostkę czasu [kg/s] (w przypadku zmiany gęstości przepływającego płynu)
    $$f(t) = \frac{dm}{dt}$$
- **Ciśnienie płynu** $p(t)$[Pa] – ilorazem siły $F(t)$ i powierzchni A, na którą działa
$$p(t) = \frac{F(t)}{A}$$

Źródła ciśnienia i przepływu

- Idealne źródło ciśnienia wytwarza stałą różnicę ciśnień niezależnie od natężenia przepływu w układzie

$$\Delta p(t) = \Delta p_s(t) \quad \forall f(t)$$

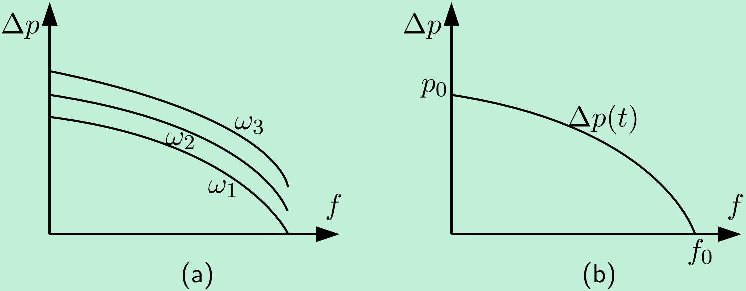
- Idealne źródło przepływu wymusza stałe natężenie przepływu bez względu na różnicę ciśnień w układzie

$$f(t) = f_s(t) \quad \forall \Delta p(t)$$

- Przykłady źródeł ciśnienia i przepływu: pompa, wieża ciśnień
- Idealne źródła hydrauliczne można zrealizować stosując układy regulacji, które utrzymują stałą różnicę ciśnień czy natężenia przepływu

W rzeczywistych warunkach charakterystyka typowej pompy jest nieliniowa

Charakterystyka pompy (a) i jej aproksymacja (b)

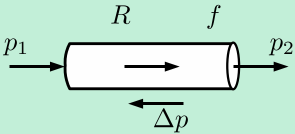


Charakterystykę pompy można przybliżyć zależnością

$$\Delta p(t) = p_0 \sqrt{1 - \frac{f(t)}{f_0}}$$

Opór hydrauliczny

Opór przepływu jest spowodowany lepkością cieczy, która sprawia, że podczas ruchu cząsteczek cieczy wystepuje zjawisko podobne w skutkach do tarcia



R – opór hydrauliczny
$f(t)$ – natężenie przepływu
$p_1(t)$ – ciśnienie na wlocie elementu
$p_2(t)$ – ciśnienie na wylocie elementu
$\Delta p = p_1 - p_2$

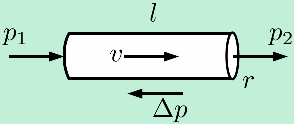
Opór hydrauliczny powoduje staty ciśnienia i wyraża się wzorem

$$R = \frac{f(t)}{\Delta p} = \frac{f(t)}{p_1(t) - p_2(t)}$$

Opór hydrauliczny jest stały tylko przy przepływie laminarnym (wartwowym) kiedy strugi cieczy płyną niezależnie od siebie

Przy przepływie turbulentny (burzliwym) strugi cieczy mieszają sie tworząc wiry i opór jest większy niż w przypadku przepływu laminarnego

Opór przewodu



$$\Delta p = p_1 - p_2$$

l, r – długość i promień przekroju przewodu
$v(t)$ – prędkość przepływu
$f(t)$ – natężenie przepływu
$p_1(t)$ – ciśnienie na wlocie elementu
$p_2(t)$ – ciśnienie na wylocie elementu

- przewody łączące elementy układów hydraulicznych wprowadzają znaczny opór powodujący stratę ciśnienia
- przy przepływie cieczy o gęstości ρ przez odcinek przewodu o długości l i promieniu przekroju r strata ciśnienia

$$\Delta p(t) = b_t \frac{l}{r} \frac{\rho}{2} v^2(t)$$

gdzie b_t – współczynnik tarcia zależny od charakteru przepływu

- właściwości współczynnika tarcia powodują inne ralacje pomiędzy natężeniem przepływu, a różnicą ciśnień dla przepływu laminarnego i turbulentnego
- dla przepływu laminarnego

$$\Delta p(t) = Rf(t)$$

- dla przepływu turbulentnego

$$\Delta p(t) = Rf^2(t)$$

- w rzeczywistych układach przepływ jest z reguły turbulentny

Pojemność ściśliwości

Ciecze rzeczywiste wykazują pewną sprężystość objętościową którą opisuje prawo Hooka

Prawo Hooka

Ciecz, która pod ciśnieniem p zajmowala posiadała objętość V, pod ciśnieniem $p + dp$ będzie miała objętość $V - dV$

$$dp = -K\frac{dV}{V}$$

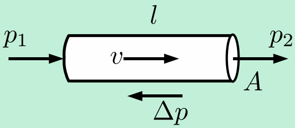
gdzie K – moduł sprężystości objętościowej [Pa].

Sprężystość może wykazywać także aparatura (zbiorniki, przeowdy); pod wpływem wewnętrznego ciśnienia aparatura ulega rozszerzeniu

$$dp = K_a dV$$

gdzie K_a – sprężystość aparatury [Pa/m^3]

Bezwładność cieczy



$\Delta p = p_1 - p_2$

l – długość przewodu
A – pole powierzchni przekroju przewodu
$v(t)$ – prędkość przepływu
$f(t)$ – natężenie przepływu
$p_1(t)$ – ciśnienie na wlocie elementu
$p_2(t)$ – ciśnienie na wylocie elementu

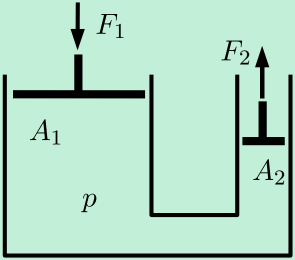
- bezwładność cieczy wynika z jej masy i ujawnia się kiedy siła wymusza przyspieszenie ruchu cieczy
- siła bezwładności $F(t) = ma(t) = \rho l A \frac{dv(t)}{dt} = \rho l \frac{df(t)}{dt}$
- siła wynika z różnicy ciśnień $F(t) = \Delta p(t) A$
- ostatecznie

$$\Delta p(t) = M \frac{df(t)}{dt}$$

gdzie $M = \frac{\rho l}{A}$ – współczynnik bezwładności

Transformacja ciśnienia i siły

Prasa hydrauliczna



A_1, A_2 – powierzchnie tłoków
$F_1(t)$ – siła zewnętrzna
$F_2(t)$ – siła tłoka o pow. A_2
$p(t)$ – ciśnienie w prasie

Prasa hydrauliczna umożliwia przeniesienie i zmianę siły za pomocą układu hydraulicznego

Siła $F_1(t)$ powoduje, że tłok o pow. A_1 przesuwa się do środka prasy o odcinek x_1

Tłok o pow. A_2 przesuwa się na zewnątrz o odcinek $x_2(t)$

Zakładając nieściśliwość cieczy po obu stronach prasy przesuwa się taka sama objętość cieczy

$$A_1 x_1(t) = A_2 x_2(t)$$

Pomijając lepkość cieczy praca wykonana przez siłę $F_1(t)$ jest taka sama jak praca wykonana przez siłę $F_2(t)$

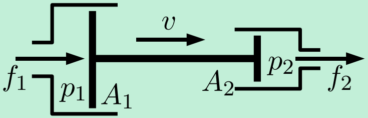
$$F_1(t) x_1(t) = F_2(t) x_2(t)$$

Stąd

$$\frac{F_2(t)}{A_2} = \frac{F_1(t)}{A_1} = p(t)$$

Ciśnienie działające na oba tłoki jest takie samo

Przekładnia tłokowa



A_1, A_2 – powierzchnie tłoków
$f_1(t)$ – przepływ wejściowy
$f_2(t)$ – przepływ wyjściowy
$p_1(t), p_2(t)$ – ciśnienie w komorach
$v(t)$ – prędkość ruchu tłoków

Przekładnia tłokowa umożliwia zmianę i przeniesienie ciśnienia pomiędzy układami hydraulicznymi połączonymi mechanicznie

Przepływ $f_1(t)$ powoduje ruch tłoka z prędkością $v(t)$

$$f_1(t) = A_1 v(t)$$

Tłoki połączone są mechanicznie – drugi tłok porusza się z taką samą prędkością

$$f_2(t) = A_2 v(t)$$

Wykorzystując obie zależnośći opisujące przepływy uzyskujemy

$$\frac{f_1(t)}{A_1} = \frac{f_2(t)}{A_2}$$

W idealnej przekładni praca wykonana po obu stronach jest taka sama (nie ma strat)

$$p_1(t)f_1(t) = p_2(t)f_2(t)$$

Stąd

$$\frac{p_1(t)}{p_2(t)} = \frac{A_2}{A_1}$$

Dynamika cieczy doskonałej

Równanie ciągłości

Równanie ciągłości opisuje ruch cieczy w obwodzie o zmiennym przekroju

W każdej chwili objętości $V_1(t)$ i $V_2(t)$ przepływające przez różne przekroje obwodu muszą być jednakowe

$$V_1(t) = V_2(t) \Rightarrow \frac{dV_1(t)}{dt} = \frac{dV_2(t)}{dt}$$

Uwzględniając przekroje obwodu

$$A_1 v_1(t) = A_2 v_2(t)$$

gdzie v_1, v_2 – prędkość cieczy w odpowiednich przekrojach

Z równania ciągłości wynika, że w przewężeniach ciecz płynie szybkiej

Stan równowagi dynamicznej

Stan równowagi dynamicznej opisuje ruch cieczy w przewodzie o zmiennym przekroju, położonym na różnych wysokościach

Równanie Bernoullego

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \mathsf{const}$$

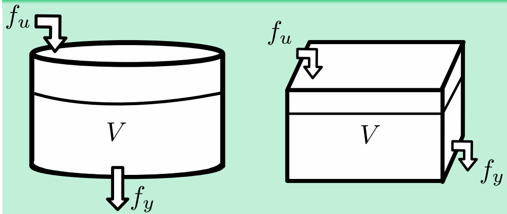
gdzie p – ciśnienia statyczne, $\frac{\rho v^2}{2}$ – ciśnienie dynamiczne, $\rho g h$ – cisnienie podnoszenia (g – przyspieszenie ziemskie)

Równanie Bernoullego opisuje związek pomiędzy ciśnieniem, prędkością i wysokością przepływającej cieczy

Zbiorniki

Zbiorniki o różnych kształtach i sztywnej konstrukcji są typowym elementem układów hydraulicznych

Bilans zbiornika



$f_u(t)$ – przepływ wejściowy

$f_y(t)$ – przepływ wyjściowy

$V(t)$ – objętość cieczy

Różnica natężenia przepływu

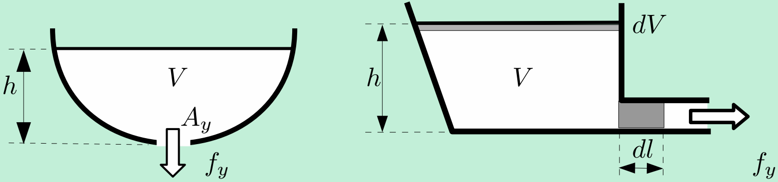
$$\Delta f(t) = f_u(t) - f_y(t) = \frac{dV}{dt}$$

Jeśli zbiornik jest prostopadłościanem

$$\Delta f(t) = f_u(t) - f_y(t) = \frac{dV}{dt} = A\frac{dh(t)}{dt}$$

gdzie A pole powierzchni dna zbiornika, $h(t)$ – wysokość napełnienia

Zbiornik ze swobodnym wypływem



Wypływ swobodny – ciecz wypływa ze zbiornika pod wpływem własnego ciężaru

Objętość cieczy wypływającej ze zbiornika przez otwór o powierzchni A_y

$$dV(t) = A_y dl \Rightarrow dl = \frac{dV(t)}{A_y}$$

Ciecz wypływająca zyskuje energię kinetyczną kosztem energii potencjalnej cieczy w zbiorniku (równanie Bernoullego)

$$\rho g h(t) = \frac{\rho v^2(t)}{2} \Rightarrow v(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

$$v(t) = \frac{dl}{dt} = \frac{dV(t)}{dtA_y} = \sqrt{2gh(t)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = A_y\sqrt{2gh(t)} = f_y(t)$$

- natężenie przepływu nie zależy od kształtu zbiornika, ale od powierzchni otworu wyjściowego i poziomu cieczy
- w przypadku zbiornika zamkniętego należy jeszcze wziąć pod uwagę ciśnienie cieczy w zbiorniku

$$p(t) + \rho gh(t) = \frac{\rho v^2(t)}{2} \Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{2p(t)}{\rho} + 2gh(t)}$$

stąd

$$f_y(t) = A_y\sqrt{\frac{2p(t)}{\rho} + 2gh(t)}$$

Zbiornik zasilany cieczą o swobodnym wypływie

Bilans zbiornika

$$f_u(t) - f_y(t) = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt} = S(h)\frac{dh}{dt}$$

gdzie $S(h) = \frac{dV}{dh}$ – pole powierzchni zbiornika na poziomie $h(t)$

Z równania Bernoullego otrzymujemy bilans energii cieczy wypływającej

$$f_y(t) = A_y\sqrt{2gh(t)}$$

Czyli bilans zbiornika przybiera postać

$$f_u(t) - A_y\sqrt{2gh(t)} = S(h)\frac{dh}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$f_u(t) = A_y\sqrt{2gh(t)} + S(h)\frac{dh}{dt}$$

Zależność poziomu cieczy of natężenia wpływającej cieczy opisuje nieliniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu

Dokonując linearyzacji w punkcie pracy (f_{u0}, h_0)

$$\Delta f_u = A_y\sqrt{\frac{g}{2h_0}}\Delta h + S(h_0)\Delta h^{(1)}$$

$$\Downarrow$$

$$f_u(t) - f_{u0} = A_y\sqrt{\frac{g}{2h_0}}h(t) - A_y\sqrt{\frac{g}{2h_0}}h_0 + S(h_0)\frac{dh(t)}{dt}$$

W dziedzinie operatorowej

$$f_u(s) = A_y\sqrt{\frac{g}{2h_0}}h(s) + S(h_0)sh(s)$$

Stąd transmitancja

$$G(s) = \frac{1}{S(h_0)s + A_y\sqrt{\frac{g}{2h_0}}}$$

Układ zlinearyzowany jest układem inercyjnym pierwszego rzędu

Zbiornik z ograniczonym wypływem

Załóżmy, że wypływ odbywa się przez odcinek przewodu o oporze R

Bilans zbiornika

$$f_u(t) - f_y(t) = S(h)\frac{dh}{dt}$$

Zakładając, że wypływ ze zbiornika jest laminarny różnica ciśnień na końcach przewodu odprowadzającego ciecz ze zbiornika

$$\Delta p(t) = Rf_y(t)$$

gdzie $\Delta p(t)$ – różnica ciśnień na krańcach przewodu

Na wejściu przewodu panuje ciśnienie $\rho g h(t)$ zaś na wyjściu ciśnienie atmosferyczne (0) stąd

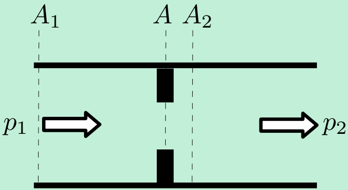
$$\Delta p(t) = \rho g h(t) - 0 = Rf_y(t) \Rightarrow f_y(t) = \frac{\rho g h(t)}{R}$$

Ostatecznie

$$f_u(t) = \frac{\rho g h(t)}{R} + S(h)\frac{dh}{dt}$$

Elementy nastawcze

Przepływ przez zwężkę



A – przekrój zwężenia
A_1 – przekrój przed zwężeniem
$f(t)$ – przekrój za zwężeniem
$p_1(t)$ – ciśnienie wejściowe
$p_2(t)$ – ciśnienie wyjściowe

Z równania Bernoullego otrzymujemy

$$p_1(t) + \frac{\rho v_1^2(t)}{2} = p_2(t) + \frac{\rho v_2^2(t)}{2} \qquad (*)$$

gdzie $v_1(t)$ i $v_2(t)$ – prędkość cieczy prze i za zwężką

Na podstawie równania ciągłości

$$A_1 v_1(t) = A_2 v_2(t) \Rightarrow v_1(t) = \frac{A_2}{A_1} v_2(t)$$

Po podstawieniu do $(*)$ i przekształceniu

$$v_2(t) = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{\frac{2\Delta p(t)}{\rho}}$$

gdzie $\Delta p(t) = p_1(t) - p_2(t)$

Wykorzystując ponownie równanie ciągłości

$$v(t)A = v_2(t)A_2 \Rightarrow v(t) = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{\frac{2\Delta p(t)}{\rho}}$$

Natężenie przepływu przez zwężkę

$$f(t) = Av(t) = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{\frac{2\Delta p(t)}{\rho}} = \alpha \sqrt{\frac{2\Delta p(t)}{\rho}}$$

gdzie $\alpha = \dfrac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}}$

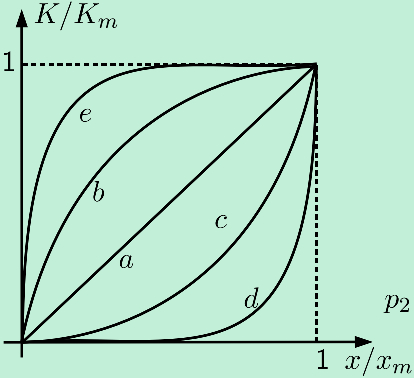
Zawory

- W praktyce nie stosuje się zwężek o zmiennym przekroju
- Rolę elementów nastawczych pełnią zasuwy, klapy i zawory
- Zależność pomiędzy przepływem $f(t)$, a spadkiem ciśnienia $\Delta p(t)$ jest następująca

  $$f(t) = K\sqrt{\frac{\Delta p(t)}{\gamma}}$$

  gdzie γ – względna gęstość przepływającej cieczy, K – współczynnik normalny przepływu
- Współczynnik normalny zaworu zależy od przesunięcia trzpienia zaworu – charakterystyka wewnętrzna zaworu

Charakterystyki zaworów



a – liniowy
b – pierwiastkowy
c – stałoprocentowy
d – hiperboliczny
e – szybko otwierający się

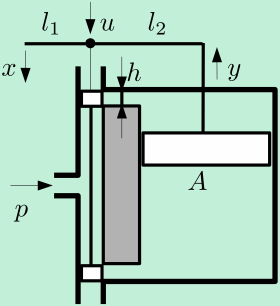
K_m – wartość K przy otwartym zaworze
x_m – maksymalne przesunięcie trzpienia przy otwartym zaworze
$x_w = \frac{x}{x_m}$

Charakterystyki $K = f(xw)$

Zawór	Charakterystyka
liniowy	$K = K_m x_w$
pierwiastkowy	$K = K_m \sqrt{x_1}$
stałoprocentowy	$K = K_m \alpha^{x_w - 1}$
hiberboliczny	$K = \dfrac{K_m}{\alpha(1 - x_w) + x_w}$
szybko otwierający się	$K = \dfrac{x_w}{x_w + \alpha} K_m$

Przykłady

Serwomotor hydrauliczny



A – pole pow. tłoka roboczego
x – przesunięcie końca dźwigni
y – przesunięcie tłoka roboczego
u – przesunięcie tłoków sterujących
l_1, l_2 – długości ramion dźwigni
$p(t)$ – ciśnienie oleju
h – wysokość okna sterującego ($b \times h$)

Przesunięcie tłoczków sterujących (za pomocą dźwigni) powoduje dopływ oleju do komory roboczej

Pod wpływem oleju tłok roboczy przesuwa się wspomagając ruch dźwigni

W chwili $t = 0$ przesuwamy koniec dźwigni; przesunięcie $u(t)$

$$u(t) = \frac{l_2}{l_1 + l_2} x(t) - \frac{l_1}{l_1 + l_2} y(t)$$

Przesunięcie dźwigni powoduje otwarcie jednego z okien sterujących

$$S(t) = bu(t), \quad -h \leqslant u(t) \leqslant h$$

gdzie $S(t)$ – powierzchnia otwarcia okna sterującego

Natężenie przepływu cieczy przez okno sterujące

$$f(t) = \frac{dV(t)}{dt} = A \frac{dy(t)}{dt} \quad (*)$$

Zgodnie z równaniem Bernoullego po otwarciu okna sterującego

$$p(t) = \frac{\rho v^2(t)}{2} \Rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{2p(t)}{\rho}}$$

Stąd natężenie przepływu można alternatywnie wyrazić w postaci

$$f(t) = bu(t)v(t) = bu(t)\sqrt{\frac{2p(t)}{\rho}} = b\sqrt{\frac{2p(t)}{\rho}} \left(\frac{l_2}{l_1 + l_2} x(t) - \frac{l_1}{l_1 + l_2} y(t) \right) (**)$$

Porównując (∗) z (∗∗) (równanie ciągłości) otrzymujemy

$$A\frac{dy(t)}{dt} = b\sqrt{\frac{2p}{\rho}}\left(\frac{l_2}{l_1+l_2}x(t) - \frac{l_1}{l_1+l_2}y(t)\right)$$

czyli

$$A\frac{dy(t)}{dt} + b\sqrt{\frac{2p}{\rho}}\frac{l_1}{l_1+l_2}y(t) = b\sqrt{\frac{2p}{\rho}}\frac{l_2}{l_1+l_2}x(t)$$

W dziedzinie operatorowej

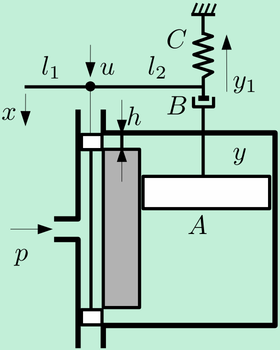
$$y(s)\left(sA + b\sqrt{\frac{2p}{\rho}}\frac{l_1}{l_1+l_2}\right) = x(s)b\sqrt{\frac{2p}{\rho}}\frac{l_2}{l_1+l_2}$$

stąd

$$G(s) = \frac{b\sqrt{\frac{2p}{\rho}}\frac{l_2}{l_1+l_2}}{sA + b\sqrt{\frac{2p}{\rho}}\frac{l_1}{l_1+l_2}} = \frac{k}{Ts+1}$$

gdzie $k = \frac{l_2}{l_1}$, $T = \frac{A(l_1+l_2)}{bl_1}\sqrt{\frac{\rho}{2p}}$

Serwomotor hydrauliczny z elastycznym sprzężniem zwrotnym



A – pole pow. tłoka roboczego
x – przesunięcie końca dźwigni
y – przesunięcie tłoka roboczego
y_1 – rozciągnięcie/ściśnięcie sprężyny
u – przesunięcie tłoków sterujących
l_1, l_2 – długości ramion dźwigni
$p(t)$ – ciśnienie oleju
h – wysokość okna sterującego $(b \times h)$
C – współczynnik sztywności sprężyny
B – współczynnik tarcia lepkiego

Serwomotor dodatkowo wyposażony jest w podsystem mechaniczny (sprężyna i tłumik)

Podsystem mechaniczny ułatwia przesunięcie dźwigni w kierunku przeciwnym do początkowego

Równanie ruchu tłoków sterujących

$$u(t) = \frac{l_2}{l_1 + l_2} x(t) - \frac{l_1}{l_1 + l_2} y_1(t)$$

Równanie podsystemu mechanicznego

$$C y_1(t) + B \frac{dy_1(t)}{dt} = B \frac{dy(t)}{dt}$$

Z równania ciągłości (przykład poprzedni) otrzymujemy

$$bvu(t) = A \frac{dy(t)}{dt}, \quad v = \text{const}$$

$$\Downarrow$$

$$bv(t) \left(\frac{l_2}{l_1 + l_2} x(t) - \frac{l_1}{l_1 + l_2} y_1(t) \right) = A \frac{dy(t)}{dt}$$

W dziedzinie operatorowej

$$\begin{cases} Cy_1(s) + sBy_1(s) = sBy(s) \\ \dfrac{bvl_2}{l_1+l_2}x(s) - \dfrac{bvl_1}{l_1+l_2}y_1(s) = sAy(s) \end{cases}$$

stąd

$$\frac{bvl_2}{l_1+l_2}x(s) = \frac{bvl_1}{l_1+l_2}\frac{sB}{C+sB}y(s) + sAy(s)$$

Transmitancja

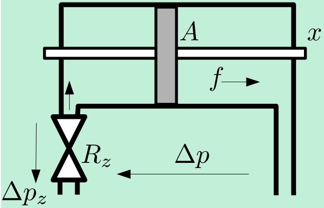
$$G(s) = \frac{\dfrac{bvl_2}{l_1+l_2}}{sA + \dfrac{bvl_1}{l_1+l_2}\dfrac{sB}{C+sB}} = \frac{bvl_2(C+sB)}{s(sAB(l_1+l_2) + AC(l_1+l_2) + (bvl_1)B)}$$

ostatecznie

$$G(s) = k\frac{1+sT_1}{s(1+sT_2)}$$

gdzie $k = \dfrac{bvl_2}{A(l_1+l_2) + l_1bv\dfrac{B}{C}}, \quad T_1 = \dfrac{B}{C}, \quad T_2 = \dfrac{AB(l_1+l_2)}{AC(l_1+l_2) + Bl_1bv}$

Siłownik hydrauliczny



A – pole pow. tłoka roboczego
$x(t)$ – przesunięcie tłoka
R_z – opór hydrauliczny zaworu
$\Delta p(t)$ – różnica ciśnień
$\Delta p_r(t)$ – spadek ciśnienia na zaworze
$f(t)$ – natężenie przepływu cieczy

Ruch cieczy jest wymuszany przez zewnętrzne ciśnienie Δp, które musi pokonać opory przepływu (R_z)

Z bilansu ciśnień otrzymujemy

$$\Delta p = \Delta p_r$$

Spadek ciśnienia na zaworze zależy od natężenia przepływu i oporu hydraulicznego (przepływ laminarny)

$$\Delta p_r = R_z f(t)$$

Natężenie przepływu

$$f(t) = \frac{dV(t)}{dt} = A\frac{dx(t)}{dt}$$

Ostatecznie

$$\Delta p(t) = R_z f(t) = R_z A\frac{dx(t)}{dt}$$

W dziedzinie operatorowej

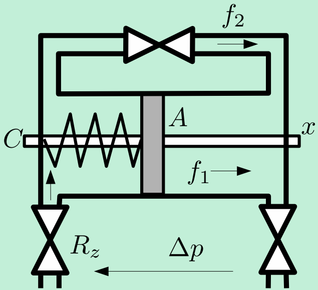
$$\Delta p(s) = R_z A s x(s)$$

Stąd transmitancja modelu

$$G(s) = \frac{x(s)}{\Delta p(s)} = \frac{1}{R_z A s}$$

Jest to człon całkujący idealny

Siłownik hydrauliczny ze sprężyną



A – pole pow. tłoka roboczego
$x(t)$ – przesunięcie tłoka
R_z – opór hydrauliczny zaworu
$\Delta p(t)$ – różnica ciśnień
C – wsp. sprężystości sprężyny
$f(t)$ – natężenie przepływu cieczy

Całkowity strumień cieczy o natężeniu $f(t)$ rozdzielany jest w siłowniku na dwa strumienie o natężeniach $f_1(t)$ i $f_2(t)$

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t)$$

Strumień $f_2(t)$ pokonuje opór R_z co wywomuje powstanie różnicy ciśnień

$$\Delta p_{rz2} = R_z f_2(t)$$

Strumień $f(t)$ pokonuje opór $2R_z$ (dwa zawory) co wywomuje powstanie różnicy ciśnień

$$\Delta p_{rz} = 2R_z f(t)$$

Stąd bilans ciśnień

$$\Delta p(t) = \Delta p_{rz} + \Delta p_{rx2}$$

Spadek ciśnienia Δp_{rz2} stanowi różnicę ciśnienia na tłoku roboczym, która przeciwstawia się sile sprężystkości sprężyny

$$A\Delta p_{rz2} = Cx(t) \Rightarrow AR_z f_2(t) = Cx(t) \Rightarrow f_2(t) = \frac{C}{AR_z}x(t)$$

Zależność między natężeniem przepływu $f_1(t)$ i ruchem tłoka

$$f_1(t) = A\frac{dx(t)}{dt}$$

Stąd przepływ całkowity

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = A\frac{dx(t)}{dt} + \frac{C}{AR_z}x(t)$$

Ostateczna postać bilansu ciśnień

$$\Delta p(t) = 2R_z f(t) + R_z f_2(t) = 2R_z A \frac{dx(t)}{dt} + \frac{3C}{A} x(t)$$

W dziedzinie operatorowej

$$\Delta p(s) = 2R_z A s x(s) + \frac{3C}{A} x(s)$$

Transmitancja

$$G(s) = \frac{x(s)}{\Delta p(s)} = \frac{1}{2R_z A s + \frac{3C}{A}} = \frac{k}{Ts + 1}$$

gdzie $k = \frac{A}{3C}$, $T = \frac{2A^2 R_z}{3C}$