Dynamika układów mechanicznych

dr hab. inż. Krzysztof Patan

Wprowadzenie

- Modele układów mechanicznych opisują ruch ciał sztywnych obserwowany względem przyjętego układu odniesienia
- Ruch ciała w przestrzeni można rozłożyć na ruch postępowy i obrotowy
- Podstawowe wielkości
  - **Przemieszczenie** $x(t)$ [m]
  - **Prędkość** $v(t)$[m/s]
  - **Siła** $F(t)$[N] – przyczyna ruchu ciała
  - **Moment siły** $M(t)$[Nm] – podstawowe pojęcie w ruchu obrotowym

Źródła energii mechanicznej

- Źródło energii mechanicznej – układ zdolny do wykonania pracy, wytwarzający siły lub momenty sił zewnętrzne względem analizowanego układu
- Źródłem energii mechanicznej może być inny fragment układu mechanicznego poza granicami analizowanego obiektu
- Przykłady źródeł energii mechanicznej: sprężyna, masa w polu grawitacyjnym, silnik przetwarzający energię w energię mechaniczną
- Stosując dodatkowe elementy (przekładnie, siłowniki) można dopasować źródło energii do układu,np. zamienić ruch obrotowy na posuwisty

Źródła siły i prędkości – ruch posuwisty

- źródła energii mechanicznej są wytwarzane przez siły działające w określonym kierunku
- źródła zapewniają określoną siłę działania lub określoną prędkość ruchu
- źródło siły działa na układ z taką samą siłą niezależnie od prędkości ruchu

$$F(t) = F_s(t), \quad \forall v(t)$$

- źródło prędkości działa na ukad z taką siłą, że zapewnia ruch o stałej prędkości

$$v(t) = v_s(t), \quad \forall F(t)$$

- rzeczywiste źródła energii mają ograniczoną moc czy ograniczony zakres ruchu

Źródła momentu siły i prędkości obrotowej – ruch obrotowy

- źródła energii mechanicznej są wytwarzane przez momenty napędowe
- źródło momentu siły zapewnia moment siły niezależny od prędkości kątowej

$$M(t) = M_s(t), \quad \forall \omega(t)$$

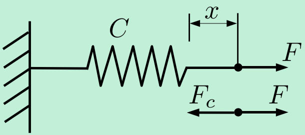
- źródło prędkości obrotowej zapewnia określoną prędkość obrotową niezależnie od momentu obciążenia

$$\omega(t) = \omega_s(t), \quad \forall M(t)$$

- rzeczywiste źródła energii mechanicznej mają powyższe właściwości tylko w ograniczinym zakresie obciążenia

Sprężystość

Sprężyna w ruchu posuwistym



C – sztywność sprężyny [N/m]

$x(t)$ – przemieszczenie [m]

$F(t)$ – przyłożona siła zewnętrzna [N]

$F_c(t)$ – siła reakcji sprężyny [N]

- Sprężyna przeciwdziała zmianie położenia punktu wymuszanej przez siłę zewnętrzną $F(t)$
- Przemieszczenie punktu $x(t)$ wyznacza się względem punktu neutralnego
- Siła reakcji sprężyny jest proporcjonalna do przemieszczenia

$$F_c(t) = Cx(t)$$

- Jeżeli zewnętrzna siła F spowodowała przesunięcie dx to została wykonana praca

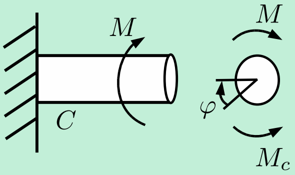
$$dW_c = F dx$$

- Sprężyna ściśnięta/rozciągnięta do położenia x_1 gromadzi energię równą sumie elementarnych ilości pracy jakie należało wykonać by odkształcić sprężynę do tego położenia

$$W_c = \int_0^{x_1} F dx = \int_0^{x_1} C x dx = \frac{C x_1^2}{2}$$

- Sprężyna reprezentuje zgolność elementu do gromadzenia energii potencjalnej

Sprężyna w ruchu obrotowym



C – sztywność sprężyny [N/m]

$\varphi(t)$ – kąt przemieszczenia [rad]

$M(t)$ – moment siły [Nm]

$M_c(t)$ – moment siły reakcji [Nm]

- Moment siły reakcji $M_c(t)$ jest wprost proporcjonalny do przesunięcia kątowego, ale zwrócony przeciwnie

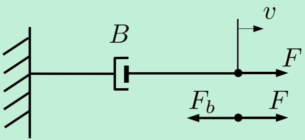
$$M_c(t) = C\varphi(t)$$

- Sprężyna skręcona do położenia φ_1 gromadzi energię równą sumie elementarnych ilości pracy jakie należało wykonać by odkształcić sprężynę do tego położenia (przy założeniu, że siła jest przyłożona prostopadle do promienia przekroju sprężyny)

$$W_c = \int_0^{\varphi_1} M d\varphi = \int_0^{\varphi_1} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi_1^2}{2}$$

Tarcie

Tarcie lepkie – ruch posuwisty



B – tłumienność (wsp. tarcia) [Ns/m]

$v(t)$ – prędkość [m/s]

$F(t)$ – przyłożona siła zewnętrzna [N]

$F_c(t)$ – siła reakcji tłumika [N]

- Tarcie lepkie wystepuję podczas ruchu ciała w cieczy lub gazie
- W modelach dynamiki działanie tarcia lepkiego reprezentowane jest przez tłumik, który hamuje ruch pubnktu wymuszany przez siłę zewnętrzną
- Siła reakcji tłumika jest wprost proporcjonalna do prędkości, ale skierowana przeciwnie

$$F_b(t) = Bv(t) \quad \text{lub} \quad F_b(t) = B\frac{dx(t)}{dt}$$

gdzie $x(t)$ – przemieszczenie punktu

- Zrównoważenie siły tarcia wymaga wykonania pracy, która zamienia się w ciepło
- Elementarne przemieszczenie dx pod wpływem zewnętrznej siły F wymaga wykonania pracy

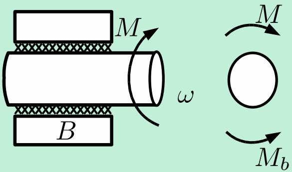
$$dW_b = F dx$$

- Energia potrzebna do przesunięcia końca tłumika na pozycję x_1

$$W_b = \int_0^{x_1} F dx = \int_0^{x_1} Bv dx = \int_0^{t_1} Bv \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{t_1} Bv^2 dt$$

- Sprężyna reprezentuje proces przekształcania energii mechanicznej w ciepło (straty energii)
- Tarcie lepkie może wynikać z właściwości ośrodka, w którym odbywa się ruch jak również przesuwania ciał po warstwie smaru
- Przykład realizacji tłumika: tłok przesuwający się w cylindrze wypełnionym cieczą

Tarcie lepkie – ruch obrotowy



B – tłumienność [N/m]

$\omega(t)$ – prędkość obrotowa [1/s]

$M(t)$ – moment siły [Nm]

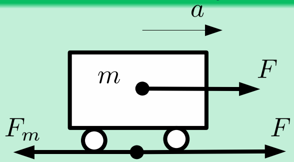
$M_b(t)$ – moment siły reakcji [Nm]

- Tarcie lepkie w ruchu obrotowym dotyczy, np. łożyska, tłumika obrotowego
- Moment siły reakcji $M_b(t)$ jest wprost proporcjonalny do prędkości

$$M_b(t) = B\omega(t) \quad \text{lub} \quad M_b(t) = B\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Bezwładność

Bezwładność w ruchu posuwistym



m – masa ciała (bezwładność) [kg]

$a(t)$ – przyspieszczenie [m/s^2]

$F(t)$ – przyłożona siła zewnętrzna [N]

$F_m(t)$ – siła reakcji masy [N]

- W ruchu posuwistym ciała o masie m występuje siła bezwładności, która przeciwstawia się zmianie prędkości powodowanej przez siłę zewnętrzną
- Siła reakcji masy jest przeciwnie skierowana do przyspieszenia $a(t)$ i jest do niego proporcjonalna

$$F_m(t) = ma(t) \quad \text{lub} \quad F_m(t) = m\frac{dv(t)}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

- Jeżeli siła F działa na ciało o masie m na odcinku dx to przyspiesza ruch ciała w tym czasie dzięki wykonanej pracy

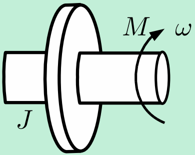
$$dW_m = Fdx$$

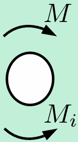
- Energia dostarczona podczas rzesunięcia ciała do położenia x_1 odpowiada sumie prac elementarnych

$$W_m = \int_0^{x_1} Fdx = \int_0^{x_1} m\frac{dv(t)}{dt}dx = \int_0^{v_1} m\frac{dx(t)}{dt}dv = \frac{mv_1^2}{2}$$

- Obiekt charakteryzuje się zdolnością do magazynowania energii kinetycznej

Moment bezwładności





J – moment bezwładności [kgm^2]

$\omega(t)$ – prędkość kątowa [1/s]

$M(t)$ – moment siły [Nm]

$M_i(t)$ – moment siły reakcji [Nm]

- Moment bezwładności reprezentuje bezwładność ciała w ruchu obrotowym
- Moment siły reakcji jest przeciwnie skierowany do przyspieszenia kątowego i jest do niego proporcjonalny

$$M_i(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} \quad \text{lub} \quad M_i(t) = J\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}$$

gdzie $\varphi(t)$ – kąt obrotu

- Moment bezwładności punktu zależy od jego masy i kwadratu promienia obrotu
- Moment bezwładności ciała jest sumą elementarnych momentów bezwładności
- Całkowanie odbywa się na całym zakresie wartości masy i uwzględnia różne odległości r-elementarnych mas od osi obrotu
$$J = \int_m r^2 dm$$

Zasada d'Alemberta

Podstawą tworzenia modeli układów mechanicznych jest dynamiczna równowaga sił i momentów sił – zasada d'Alemberta

Zasada d'Alemberta

Suma sił i momentów sił działających na obiekt jest równa zero

$$\sum_i F_i = 0, \qquad \sum_i M_i = 0$$

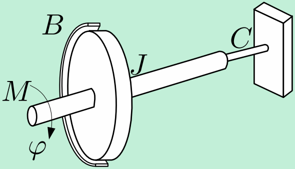
Konstrukcję modelu rozpoczyna się od określenia sił i momentów sił pochodzących spoza rozpatrywanego układu i które będą reprezentować źródła energii mechanicznej

Następnie wyprowadza się bilanse wszystkich sił oraz momentów sił działających na obiekt

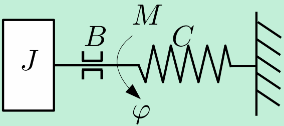
Przykłady

Układ obrotowy

Rozważmy układ obrotowy z tarczą o bezwładności J, łożyskiem wprowadzającym tarcie lepkie B i wałem o sprężystości C z jednym końcem unieruchomionym



Schemat blokowy



gdzie B – tarcie lepkie, C – spężystość wału, $\varphi(t)$ – kąt obrotu, $M(t)$ – moment siły, J – moment bezwładności

Zgodnie z zasadą d'Alemberta bilans momentów

$$M(t) = M_i(t) + M_b(t) + M_c(t)$$

Postać poszczególnych momentów w funkcji kąta obrotu

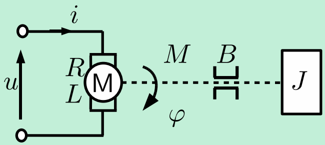
$$M_i(t) = J\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}, \quad M_b(t) = B\frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad M_c(t) = C\varphi(t)$$

Ostatecznie

$$M(t) = J\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + B\frac{d\varphi(t)}{dt} + C\varphi(t)$$

Uwaga! Układ obrotowy jest układem liniowym drugiego rzędu (obiekt inercyjny drugiego rzędu lub obiekt oscylacyjny)

Silnik prądu stałego



M – moment obrotowy
B – tarcie lepkie
J – bezwładność
R, L – rezystancja i indukcyjność twornika
u, i – napięcie na zaciskach i prąd twornika
φ – kąt obrotu

Równanie twornika

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + K_e\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

gdzie K_e – stała elektryczna

Moment elektryczny

$$M_e(t) = K_m i(t)$$

gdzie K_m – stała momentu obrotowego silnika

Moment mechaniczny

$$M_m(t) = J\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + B\frac{d\varphi(t)}{dt} + M_l(t)$$

gdzie $M_l(t)$ – obciążenie silnika

Na podstawie zasady d'Alemberta zachodzi równowaga momentów sił

$$M_m(t) = M_e(t)$$

$$\Downarrow$$

$$J\frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + B\frac{d\varphi(t)}{dt} + M_l(t) + K_m i(t) = 0$$

W dziedzinie operatorowej, zakładając stały moment obciążenia

$$\begin{cases} s^2 J\varphi(s) + sB\varphi(s) + K_m i(s) = 0 \\ u(s) = Ri(s) + sLi(s) + sK_e\varphi(s) \Rightarrow i(s) = \frac{u(s) - sK_e\varphi(s)}{R + sL} \end{cases}$$

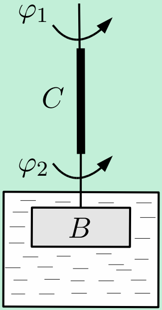
Zakładając jako wejście napięcie u, a jako wyjście kąt obrotu φ otrzymujemy następującą transmitancję

$$G(s) = \frac{K_m}{-s^3 JL - s^2(JR - BR) + s(K_e - BR)}$$

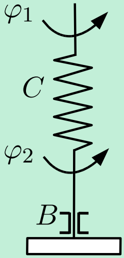
Wirnik łopatkowy

Rozpatrzmy mieszadło z wirnikiem łopatkowym, przyjmując że moment bezwładności wirnika jest pomijalnie mały

Wielkością wejściową jest kąt obrotu $\varphi_1(t)$, zaś wielkością wyjściową $\varphi_2(t)$



C – sztywność sprężyny
B – tarcie lepkie
φ_1 – kąt obrotu przez sprężyną
φ_2 – kąt obrotu za sprężyną



Na oba końce sprężyny działają momenty siły o różnych wartościach – wypadkowy moment siły zewnętrznej

$$M_c(t) = C\varphi_1(t) - C\varphi_2(t)$$

Moment związany z tarciem wirnika

$$M_b(t) = B\frac{d\varphi_2(t)}{dt}$$

Zgodnie z zasadą d'Alemberta

$$C\varphi_1(t) - C\varphi_2(t) = B\frac{d\varphi_2(t)}{dt}$$

W dziedzinie operatorowej

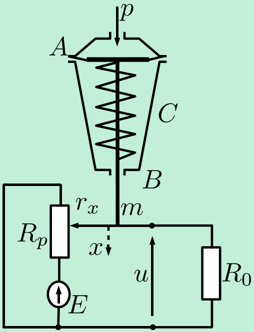
$$C\varphi_1(s) - C\varphi_2(s) = sB\varphi_2(s)$$

Transmitancja

$$G(s) = \frac{\varphi_2(s)}{\varphi_1(s)} = \frac{C}{sB + C} = \frac{1}{s\frac{B}{C} + 1}$$

Jest to obiekt inercyjny pierwszego rzędu

Przetwornik ciśnieniowo-napięciowy



p – ciśnienie powietrza [N/m^2]
A – powierzchnia membrany [m^2]
E – siła elektromotoryczna [V]
R_0 – rezystancja obciążenia [Ω]
R_p – rezystancja potencjometru liniowego [Ω]
B – współczynnik tarcia lepkiego [Ns/m]
C – sztywność sprężyny [N/m]
m – masa części ruchomych [kg]
x – przesunięcie suwaka potencjomentru [m]

Na membranę siłownika membranowego o powierzchni A działa powietrze o ciśnieniu $p(t)$ z siłą

$$F_p(t) = p(t)A$$

Sile $F_p(t)$ przeciwdziałają siły: sprężystości sprężyny, tłumienności oraz bezwładności masy

Na podstawie zasady d'Alemberta otrzymujemy

$$p(t)A = Cx(t) + B\frac{dx(t)}{dt} + m\frac{d^2x(t)}{dt}$$

Równanie potencjometru (zakładając $R_p \ll R_0$)

$$u = \frac{E}{R_p} r_x, \quad r_x(t) = kx(t)$$

gdzie k – stała potencjometru [Ω/m] Ostatecznie równanie przetwornika

$$p(t)A = \frac{R_p}{kE}\left(Cu(t) + B\frac{du(t)}{dt} + m\frac{d^2u(t)}{dt}\right)$$

W dziedzinie operatorowej

$$p(s)A = \frac{R_p}{kE}\left(C + Bs + ms^2\right)u(s)$$

Transmitancja

$$G(s) = \frac{u(s)}{p(s)} = \frac{kEA}{R_p} \frac{1}{ms^2 + Bs + C} = \frac{kEA}{R_p C} \frac{1}{\frac{m}{C}s^2 + \frac{B}{C}s + 1}$$

Podstawiając $T = \sqrt{\frac{m}{C}}$, $\xi = \frac{B}{2\sqrt{mC}}$, $K = \frac{kEA}{R_p C}$ otrzymujemy

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}$$

Uwaga! Przetwornik ciśnieniowo-napięciowy jest układem oscylacyjnym o wzmocnieniu K, okresem drgań własnych siłownika T oraz współczynnikiem tłumienia drgań własnych ξ

Schemat strukturalny przetwornika