Całkowe kryterium regulacji

dr hab. inż. Krzysztof Patan, prof. PWSZ

Całkowe kryterium regulacji

Ogólna postać kryterium

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} f(e(t), t)dt$$

gdzie

Funkcja $f()$	Nazwa
$\lvert e(t)\rvert$	IAE - Integral absolute error
$t\lvert e(t)\rvert$	ITAE - Integral time absolute error
$t^2\lvert e(t)\rvert$	IT^{2}AE - Integral squared time absolute error
$e^2(t)$	ISE - Integral squared error
$[te(t)]^2$	ISTE - Integral squared time error
$[t^n e(t)]^2$	IST^{n}E - Integral squared time to n error

Całka Parseval'a

Dla ISE, ISTE i IST^{n}E

$$J_0 = \int_0^\infty e^2(t)dt = \frac{1}{2j\pi}\int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s)ds$$

gdzie $E(s) = \frac{c(s)}{d(s)}$ oraz

$$\begin{aligned} c(s) =& c_{n-1}s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \ldots + c_1 s + c_0 \\ d(s) =& d_n s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \ldots + d_1 s + d_0 \end{aligned}$$

Dla $d(s)$ stopnia n, całkę I_n

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{c_0^2}{2d_0d_1} \\
I_2 &= \frac{c_1^2d_0 + c_0^2d_2}{2d_0d_1d_2} \\
I_3 &= \frac{c_2^2d_0d_1 + \left(c_1^2 - 2c_0c_2\right)d_0d_2 + c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3\left(d_1d_2 - d_0d_3\right)} \\
I_4 &= \frac{c_3^2\left(d_0d_1d_2 - d_3d_0^2\right) + \left(c_2^2 - 2c_1c_3\right)d_0d_1d_2}{2d_0d_4\left(d_1d_2d_3 - d_0d_3^2 - d_4d_1^2\right)} \\
&\quad + \frac{\left(c_1^2 - 2c_0c_2\right)d_0d_3d_4 + c_0^2\left(d_2d_3d_4 - d_1d_4^2\right)}{2d_0d_4\left(d_1d_2d_3 - d_0d_3^2 - d_4d_1^2\right)}
\end{aligned}
$$

Przykład 1

Rozważmy obiekt

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

oraz regulator

$$C(s) = K$$

wtedy dla $R(s) = \frac{1}{s}$ otrzymujemy

$$E(s) = \frac{1}{s+K} \Leftrightarrow e(t) = \exp^{-tK}$$

oraz

$$U(s) = \frac{K}{s+K} \Leftrightarrow u(t) = K\exp^{-tK}$$

Można policzyć ISE

$$J_0 = \int_0^\infty e^2(t)dt = \frac{1}{2K}$$

oraz regulator

$$C(s) = K$$

wtedy dla $R(s) = \frac{1}{s}$ otrzymujemy

$$E(s) = \frac{1}{s+K} \Leftrightarrow e(t) = \exp^{-tK}$$

Obiekt 1-ego rzędu – stabilny dla każdej wartości K

Można jednak zauważyć, iż

$$K \Leftrightarrow \infty \;\; to \;\; u(t) = K \exp^{-tK} = \infty$$

czyli musimy ograniczyć K.
Jedna z możliwości to kryterium LQR

$$J = \int_0^\infty \left(e^2(t) + q^2 u^2(t) \right) dt$$

gdzie q jest danym parametrem

Dla $u = Ke$ otrzymujemy

$$J = \int_0^\infty \left(e^2(t) + q^2u^2(t)\right) dt = \frac{(1 + q^2K^2)}{2K}$$

Licząc pochodne otrzymujemy, że minimum J jest dla

$$K = \frac{1}{q}$$

Przykład 2

Dany jest obiekt i regulator

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}, \qquad C(s) = K$$

Łatwo pokazać, że

- układ jest niestabilny dla $K > 2$
- szukamy $K < 2$ które minimalizuje ISE
- dla skoku jednostkowego

$$E(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + s + K}$$

Na podstawie tabeli

$$E(s) = \frac{s^2 + 2s + 1}{s^3 + 2s^2 + s + K} \rightarrow I_3 = \frac{3K + 2}{2K(2 - K)}$$

Wynik obliczeń

- minimum I_3 dla $K = \frac{2}{3}$ $(I_3 = 2.25)$
- dla $K = \frac{2}{3}$ POS=36%
- sprawdzając dominujące bieguny otrzymujemy POS=40%

Przykład 3

Dany jest obiekt i regulator

$$G(s) = \frac{1}{s^2}, \qquad C(s) = \frac{1+sT}{1+s\alpha T}$$

Dla $R(s) = \frac{1}{s}$ (skok jednostkowy) otrzymujemy

- uchyb

$$E(s) = \frac{\alpha T s^2 + s}{\alpha T s^3 + s^2 + sT + 1}$$

- kryterium całkowe

$$I_3 = \frac{\alpha T^2 + 1}{2T(1-\alpha)}$$

- optimum dla $T = \frac{1}{\alpha}$

Umieszczając kompensator w torze sprzężenia otrzymujemy transmitancję układu zamkniętego

$$\frac{\alpha T s + 1}{\alpha T s^3 + s^2 + sT + 1}$$

czyli

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{\alpha T s^3 + s^2 + sT(1 - \alpha)}{\alpha T s^3 + s^2 + sT + 1}$$

dla $R(s) = \frac{1}{s}$ (skok jednostkowy) otrzymujemy

$$E(s) = \frac{\alpha T s^2 + s + T(1 - \alpha)}{\alpha T s^3 + s^2 + sT + 1}$$

Korzystając z tabel mamy

$$I_3 = \frac{T^2 - 3\alpha T^2 + 3\alpha^2 T^2 + 1}{2T(1-\alpha)}$$

Różniczkując otrzymujemy optimum dla

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 - 3\alpha + 3\alpha^2}}$$

oraz

$$ISE_{min} = \frac{\sqrt{1 - 3\alpha + 3\alpha^2}}{1-\alpha}$$

Ostatecznie minimum dla $T = 1.732$ i $\alpha = \frac{1}{3}$

Metoda algebraiczna

Idea

Dobrać pożądaną transmitancję układu zamkniętego i algebraicznie wyznaczyć transmitancję kompensatora

Transmitancja układu zamkniętego

$$T_{cl}(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}$$

Transmitancja regulatora

$$C(s) = \frac{T_{cl}(s)}{G(s)(1 - T_{cl}(s))}$$

Własności:

- metoda różni się znacząco od poznanych metod projektowania regulatorów
  - nie mamy ograniczeń na rząd i strukturę regulatora
  - tylko para dominujących biegunów jest kontrolowana
  - nie kontrolujemy układu otwartego ($C(s)G(s)$)- czyli nie mamy wpływu na GM i PM
- dla $T_{cl} = 1$ mamy idealną odpowiedź układu ale $C(s) = \infty$
- ewidentnie musimy wprowadzić jakieś ograniczenia do metody

Ograniczenia projektowania regulatora

Aby otrzymać realistyczne rozwiązanie, to:

- regulator musi mieć właściwą transmitancję
  - brak idealnych członów różniczkujacych
- wszystkie transmitancje w układzie są właściwe
- układ sterowania jest wewnętrznie stabilny
  - wszystkie transmitancje są stabilne
- wszystkie sygnały muszą przechodzić przez obiekt
  - nie ma sygnałów wejściowych które pojawiają się bezpośrednio na wyjściu

Ograniczenia projektowania regulatora - przykład

Dany jest obiekt i pożądana transmitancja układu zamkniętego

$$G(s) = \frac{1}{s^2}, \quad T_{cl} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Gdy regulator jest w pętli sprzężenia to

$$C(s) = \frac{1}{T_{cl}(s)} - \frac{1}{G(s)} = s + 1$$

Problem: niewłaściwa transmitancja regulatora

Gdy regulator jest w torze głównym, to

$$C(s) = \frac{G(s) - T_{cl}(s)}{G(s)T_{cl}(s)} = \frac{s}{s+1}$$

Transmitancja regulatora właściwa, ale gdy występują zakłócenia $d(t)$ między regulatorem, a obiektem to

$$y(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$$

czyli układ nie jest wewnętrznie stabilny

Dobór transmitancji układu zamkniętego

Ogólne założenie

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}; \qquad T_{cl} = \frac{N_{cl}(s)}{D_{cl}(s)}$$

gdzie $rd(G(s)) = degree(D(s)) - degree(N(s))$
T_{cl} jest implementowalne dla $G(s)$ gdy

- zachodzi warunek względnego stopnia

$$rd(T_{cl}(s)) \geqslant rd(G(s))$$

- spełniony jest warunek minimalnofazowy: zera obiektu są też zerami T_{cl}

Dany jest obiekt

$$G(s) = \frac{s-1}{s(s-2)}$$

oraz zestaw T_{cl}

$$T_{cl_1} = \frac{1}{s+1};\ T_{cl_2} = \frac{s-1}{s+1};\ T_{cl_3} = \frac{s-1}{s^2+2s+2};\ T_{cl_4} = \frac{-2(s-1)}{s^2+2s+2}$$

Oznacza to, że

- T_{cl_1} nie spełnia warunku 2
- T_{cl_2} nie spełnia warunku 1
- możiwe implementacje to T_{cl_3} i T_{cl_4}

Założenia

- wyboru możemy dokonać na podstawie biegunów dominujących
- inne zera i bieguny dobieramy tak aby spełnić wymagania doboru (warunki 1 i 2)
- zalecana ostrożność przy doborze zer regulatora
- istnieje optymalna procedura doboru położenia zer i biegunów

Metody doboru transmitancji

- Metoda ITAE
- Metoda symetrycznych linii pierwiastkowych (ang. *Symmetric Root Locus*)

Należy pamiętać, że:

- sterujemy układami rzeczywistymi
- występują nasycenia i skończone energie sygnałów sterujących

Dlatego wyznaczamy i sprawdzamy

$$\frac{y}{r} = T_{cl}, \ \frac{y}{u} = G \ \rightarrow \ \frac{u}{r} = \frac{T_{cl}}{G} = T_u$$

czyli dla danego r możemy wyznaczyć u

Jeżeli u monotonicznie maleje to (dla skoku jednostkowego)

$$u(0^+) = \lim_{s\to\infty} sU(s) = \lim_{s\to\infty} sR(s)\frac{T_{cl}}{G(s)} = \lim_{s\to\infty}\frac{T_{cl}}{G(s)}$$

Przykładowo dla znanych G, T_{cl_3} i T_{cl_4} mamy

$$u(0^+) = \lim_{s\to\infty}\frac{T_{cl_3}}{G(s)} = \lim_{s\to\infty}\frac{s(s-2)}{s^2+2s+2} = 1$$
$$u(0^+) = \lim_{s\to\infty}\frac{T_{cl_4}}{G(s)} = \lim_{s\to\infty}\frac{-2s(s-2)}{s^2+2s+2} = -2$$

Fakt

Lokowanie biegunów daleko w LPZ = duża energia sygnału sterującego

Aby spełniać wymóg PM, to PM liczymy tak

$$PM = 2\sin^{-1}\frac{1}{2|T(j\omega_{gc})|}$$

Jednak:

- wzór na PM prawdziwy dla układów stopnia 2
- ω_{gc} jest najczęściej nieznane
- jeśli ω_{BW} jest znane to służy ono do estymacji ω_{gc}

Metoda ITAE

Kryterium (ITAE)

$$J = \int_0^\infty t|e(t)|dt$$

Ogólna postać T_{cl}

$$T_{cl} = \frac{\omega_0^3}{s^3 + 1.75\omega_0 s^2 + 2.15\omega_0^2 s + \omega_0^3}$$

gdzie ω_0 dobieramy aby wypełnić wymagania, np. ograniczenie energii sygnału sterującego

Metoda LQR

Kryterium LQR (podobieństwo do ISE)

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} \left(q(y(t) - r(t))^2 + u(t)^2 \right) dt$$

Dobór wartości q

- duże wartości q: ograniczenie wartości błędu, czyli duże wartości $u(t)$ i bardzo duże ζ
- małe wartości q: duże zmiany w sygnale wyjściowym (duże zmiany błędu), ale ograniczenie wartości $u(t)$

Matematycznie rozwiązanie tego problemu istnieje w dziedzinie częstotliwości (s) i czasu (t)

Optymalne T_{cl} dla $r(t) =$ skok jednostkowy to

$$T_{cl_{LQR}} = \frac{qN(0)}{D_0(0)} \frac{N(s)}{D_0(s)} \ \ i \ \ G_e(s) = \frac{e(s)}{u(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

gdzie $D_0(s)$ jest rozwiązaniem równania

$$D_0(s)D_0(-s) = D(s)D(-s) + qN(s)N(-s)$$

czyli D_0 szukamy poprzez procedurę **faktoryzacji spektralnej** - bardzo trudny problem !

Dzieląc obustronnie przez $D(s)D(-s)$ otrzymujemy

$$D_0(s)D_0(s) = 0 \rightarrow \frac{qN(s)N(-s)}{D(s)D(-s)} = 1 + G_e(s)G_e(-s) = 0$$

Można zauważyć, że graficzna reprezentacja

$$1 + qG_e(s)G_e(-s) = 0$$

to symetryczne linie pierwiastkowe (SRL)

Uwaga! Nie mogą występować bieguny na osi urojonej!

Na przykład, dla

$$G_e = \frac{s+1}{s(s+2)}$$

otrzymujemy

$$G_e(s)G_e(-s) = \frac{s+1}{s(s+2)}\frac{-s+1}{-s(-s+2)}$$

lub

$$G_e(s)G_e(-s) = \frac{-(s+1)(s-1)}{s^2(s+2)(s-2)}$$

Metoda UFC

- UFC - ang. *unity feedback configuration*
- Metoda ta umożliwia lokowanie biegunów układu zamkniętego w określone lokalizacje
- Przyjmujemy, że transmitancje obiektu, kompensatora i pożądanego układu zamkniętego to

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)},\ K(s) = \frac{B(s)}{A(s)},\ T_{cl} = \frac{N_{cl}(s)}{D_{cl}(s)}$$

- Transmitancja układu zamkniętego to

$$T_{cl} = \frac{N_{cl}(s)}{D_{cl}(s)} = \frac{B(s)N(s)}{A(s)D(s)+B(s)N(s)}$$

- Równanie UFC

$$D_{cl}(s) = A(s)D(s)+B(s)N(s)$$

Przykład

Dla $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ należy przesunąć bieguny układu zamkniętego do $\{1 \pm j\}$

Rozwiązanie

- Dane transmitancje

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{1}{s(s+1)}; \;\; T_{cl} = \frac{N_{cl}(s)}{D_{cl}(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

- Równanie UFC

$$D_{cl}(s) = A(s)D(s) + B(s)N(s) = A(s)(s^2+s) + B = s^2+2s+2$$

- Bardzo trudno znaleźć rozwiązanie! Jednak przyjmując, że $A(s)$ i $B(s)$ to wielomiany stopnia 1 to otrzymujemy

$$A(s) = a_0 + a_1 s; \quad B(s) = b_0 + b_1 s$$

- Dla $A(s) = a_0 + a_1 s$ i $B(s) = b_0 + b_1 s$ to otrzymujemy

$$(a_0 + a_1 s)(s^2+s)+b_0 + b_1 s = s^2+2s+2$$

- Porównując współczynniki wielomianów dostajemy

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Rozwiązanie powyższego układu równań

$$a_0 = 1,\ b_0 = 2,\ a_1 = 0,\ b_1 \ \rightarrow K(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = s + 2$$

Komentarz

- Istnieje rozwiązanie równania UFC, ale regulator jest niewłaściwy
- Jeśli układ jest rzędu 2 a regulator jest rzędu 1 (i gdy nie ma tych samych lokalizacji zer i biegunów) to możemy oczekiwać, że $D_{cl}(s)$ będzie rzędu 3 (a nie 2)
- Dla powyższego przykładu, jeśli $D_{cl}(s)$ jest rzędu 2 to $a_1 = 0$
- Aby otrzymać właściwą transmitancję kompensatora to $D_{cl}(s)$ musi być rzędu 3
- Wybierając dodatkowy biegun $s_3 = -3$ jako rozwiązanie otrzymujemy

$$K(s) = \frac{4s + 6}{s + 4}$$

Ogólne własności:

- Jeśli istnieje rozwiązanie UFC to rozwiązaniem jest układ równań liniowych
- W wielu przypadkach nie ma unikalnego rozwiązania
- Jeśli nawet jest rozwiązanie to nie zawsze otrzymujemy właściwy regulator
- Można wyznaczyć warunki dla których możliwe jest otrzymanie właściwych regulatorów i odpowiednie lokalizacje biegunów układu zamkniętego
    - $G(s)$ jest ściśle właściwe, tj. $deg(N(s)) < deg(D(s)) = n$
    - $N(s)$ i $D(s)$ to wielomiany względnie pierwsze (ang. *coprime*)
    - $K(s)$ będzie rzędu $n-1$ dla każdego $D_{cl}(s)$ rzędu $(2n-1)$

Ogólne rozwiązanie

- Przyjmujemy, że

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_n s^n + N_{n-1} s^{n-1} + \ldots + N_0}{D_n s^n + D_{n-1} s^{n-1} + \ldots + D_0}, \text{ gdzie } N_n = 0$$

$$K(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B_{n-1} s^{n-1} + B_{n-2} s^{n-2} + \ldots + B_1 s + B_0}{A_{n-1} s^{n-1} + A_{n-2} s^{n-2} + \ldots + A_1 s + A_0}$$

$$D_{cl}(s) = F_{2n-1} s^{2n-1} + F_{2n-2} s^{2n-2} + \ldots + F_1 s + F_0$$

- Mnożąc wielomiany i przyrównując współczynniki przy tych samych potęgach s otrzymujemy układ równań

$$S(N, D)X = F$$

$S(N, D)$ - macierz Sylwestra rzędu $2n$

$$S(N,D)=\left[\begin{array}{cc|cc|c|cc} D_0 & N_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ D_1 & N_1 & D_0 & N_0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ D_n & N_n & D_{n-1} & N_{n-1} & \dots & D_0 & N_0 \\ 0 & 0 & D_n & N_n & \dots & D_1 & N_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & D_n & N_n \end{array}\right], X=\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \\ A_1 \\ B_1 \\ \vdots \\ A_{n-1} \\ B_{n-1} \end{bmatrix}, F=\begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_4 \\ \vdots \\ F_{2n-2} \\ F_{2n-1} \end{bmatrix}$$