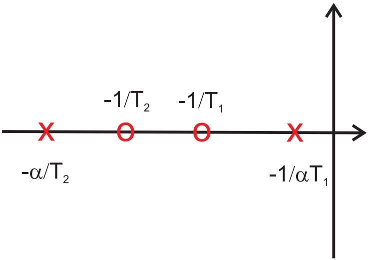
Strojenie regulatora PID

dr hab. inż. Krzysztof Patan, prof. PWSZ

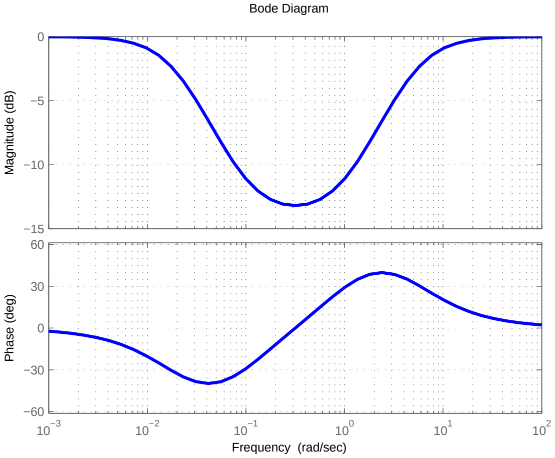
Kompensator wyprzedzająco-opóźniający

Transmitancja kompensatora ($\alpha > 1$, $T_1 > T_2$)

$$K(s) = \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{(1 + \alpha T_1 s)(1 + \alpha^{-1} T_2 s)}$$



$$T_1 = 10,\ T_2 = 1\ , \alpha = 5$$



Własności

- maksymalne opóźnienie

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}\right) = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-4}{4.4721}\right) = -41.8103^o$$

- maksymalne wyprzedzenie

$$\phi = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}\right) = -\operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{-4}{4.4721}\right) = 41.8103^o$$

- wzmocnienie

$$-20\log(\alpha) = -13.9794dB$$

Regulator PID

Transmitancja regulatora

$$K(s) = Kp + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

lub

$$K(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

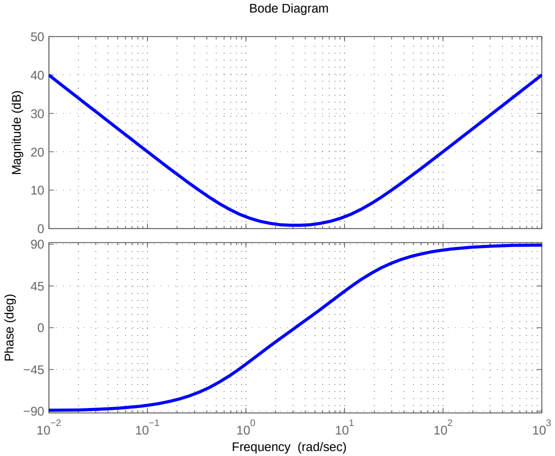
lub

$$K(s) = K\left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right)\left(\frac{1 + \tau_d s}{1 + \frac{\tau_d s}{\gamma}}\right)$$

Transmitancja regulatora

$$
\begin{aligned}
K(s) =& K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \\
=& \frac{K_i \left(\frac{K_d}{K_i} s^2 + \frac{K_p}{K_i} s + 1 \right)}{s} \\
=& \frac{K_i \left(\tau s + 1 \right) \left(\frac{\tau}{\alpha} s + 1 \right)}{s}
\end{aligned}
$$

$$K_i = 2, \quad , \alpha = 10$$



Regulator PID jako połączenie szeregowe PI i PD

$$C_{PI}(s) = \widehat{K}_p + \frac{\widehat{K}_i}{s}, \text{ regulator PI}$$

$$C_{PD}(s) = \overline{K}_p + \overline{K}_d s \text{ regulator PD}$$

$$\begin{aligned} C_{PID}(s) =& C_{PI}(s) C_{PD}(s) = \left(\widehat{K}_p + \frac{\widehat{K}_i}{s}\right)\left(\overline{K}_p + \overline{K}_d s\right) \\ =& \left(K_p K_p + \widehat{K}_i \overline{K}_d\right) + \widehat{K}_p \overline{K}_d + \frac{\widehat{K}_i \overline{K}_p}{s} \\ =& K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \end{aligned}$$

Regulator równoległy PID

$$K_{PID}(s) = K\left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right)$$

Jeżeli $\tau_i > 4\tau_d$ to

$$K_{PID}(s) = K\left(\alpha + \tau_d s\right)\left(1 + \frac{1}{\alpha \tau_i s}\right) = K_{PD}(s) K_{PI}(s)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{\tau_d}{\tau_i}}}{2} > 0$$

Wpływ części całkującej

Dla $T_i \neq 0$ i $T_d = 0$ otrzymujemy

- wzmocnienie $\forall \omega$

$$\left| 1 + \frac{1}{j\omega T_i} \right| = \sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 T_i^2}} > 1$$

- przesunięcie fazowe $\forall \omega$

$$\angle \left(1 + \frac{1}{j\omega T_i} \right) = \mathrm{tg}^{-1} \left(\frac{-1}{\omega T_i} \right) < 0$$

Oznacza to, iż

- zmniejszamy PM i GM, czyli zwiększamy oscylacje

Wpływ części różniczkującej

Dla $T_d \neq 0$ i $T_i = 0$ otrzymujemy

- wzmocnienie $\forall\omega$

$$|1 + j\omega T_d| = \sqrt{1 + \omega^2 T_d^2} > 1$$

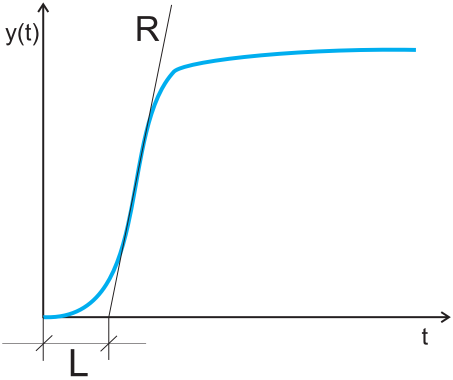
- przesunięcie fazowe $\forall\omega$

$$\angle(1 + j\omega T_d) = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{\omega T_d}{1}\right) \in [0, \frac{\pi}{2}] > 0$$

Oznacza to, iż

- zwiększamy PM, czyli zmniejszamy oscylacje

Dobór parametrów regulatora PID



- L - opóźnienie odpowiedzi
- R- nachylenie odpowiedzi układu (największe możliwe nachylenie)

Metoda Metoda Zieglera-Nicholsa

- regulator P:

$$K = \frac{1}{RL}$$

- regulator PI:

$$K = \frac{0.9}{RL}$$
$$T_i = 3.3L$$

- regulator PID

$$K = \frac{1.2}{RL}$$
$$T_i = 2L$$
$$T_d = 0.5L$$

Algorytm dla regulatora PID (układ zamknięty)

- Ustaw $K_i = K_d = 0$
- Zwiększaj K_p, aż do wystąpinia niegasnących oscylacji na wyjściu
- Zanotuj K_c i ω_c, czyli wzmocnienie przy którym wystąpiły oscylacje niegasnące i ich pulsację
- Wyznacz parametry regulatora ze wzorów

$$K_p = 0.6K_c,\ K_d = \frac{K_p \pi}{4\omega_c},\ K_i = \frac{K_p \omega_c}{\pi}$$

- regulator P:

$$K = 0.5K_c$$

- regulator PI:

$$K = 0.45Kc$$
$$T_i = 0.833T$$

- regulator PID

$$K = 0.6K_c$$
$$T_i = 0.5T$$
$$T_d = 0.125T$$

gdzie T - okres drgań niegasnących

Przykład

Transmitancja obiektu

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{6}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$D(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6(K+1)$$

Z kryterium Routh'a otrzymujemy $K_c = 10$ i $\omega_c = 3.317$ czyli $T = \frac{2\pi}{\omega_c} = 1.895$

- regulator P:

$$K = 5$$

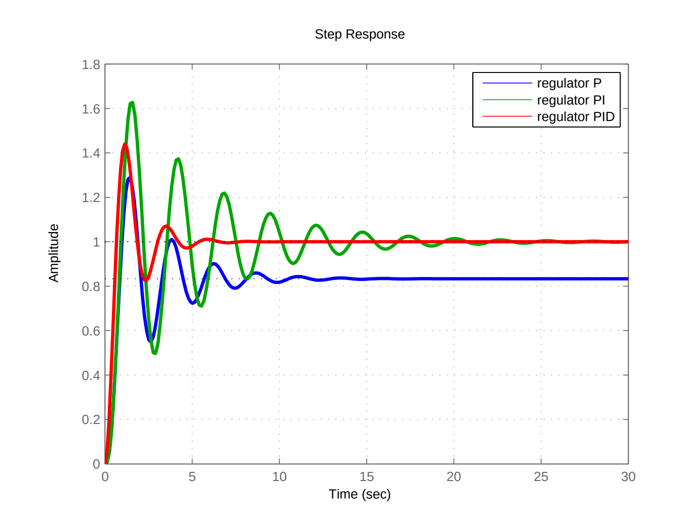
- regulator PI:

$$K = 4.5$$
$$T_i = 1.57$$

- regulator PID

$$K = 6$$
$$T_i = 0.947$$
$$T_d = 0.237$$

Odpowiedź skokowa



Przykład

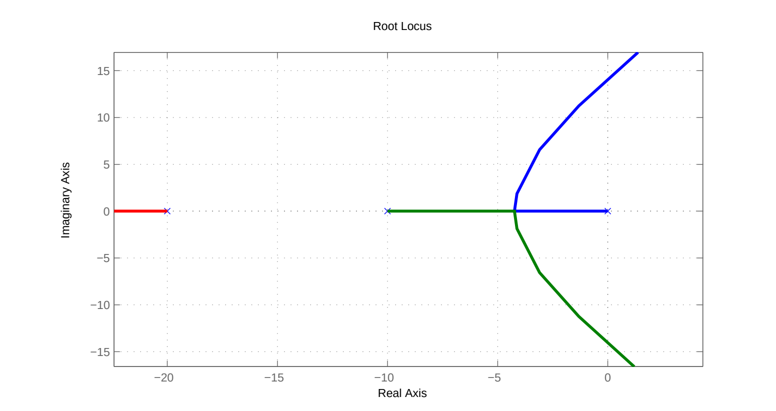
Dany jest obiekt

$$G(s) = \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)}$$

jego właściwości

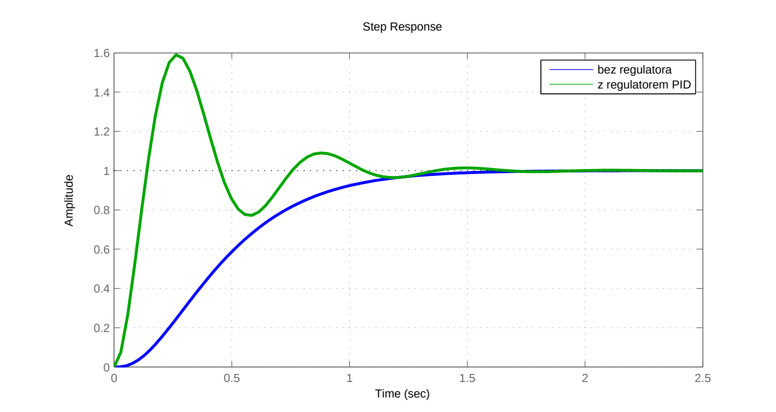
- bieguny układu zamkniętego $= \{-4.2 \pm j0.93, -21.59\}$
- $\omega_{gc} = 1.95 rad/sec$
- GM$=23dB$
- PM$=73^o$
- POS$=0\%$

Wykres linii pierwiastkowych



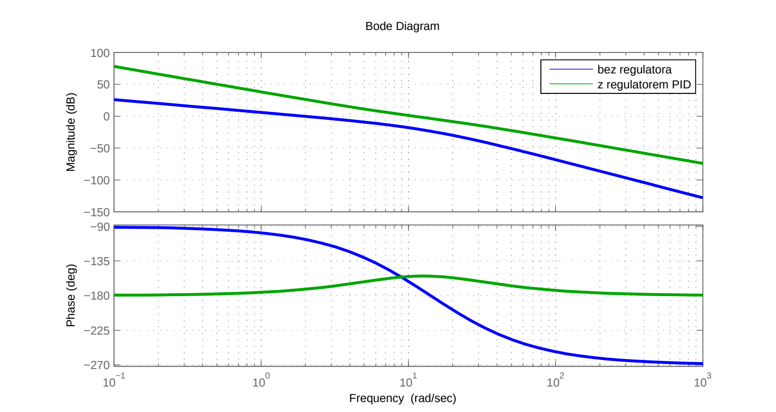
$K_c = 14$, $\omega_c = 14 rad/sec$

Odpowiedź skokowa



Wynik obliczeń: $K_p = 9$, $K_d = 0.5$, $K_i = 40$

Charakterystyka częstotliwościowa



Wynik regulacji: POS$=60\%$, $T_s = 1.2sec.$, $\omega_{gc} = 11rad/sec$, PM$=25^o$, $e_{ss} \simeq 0$

Metoda analityczna

Fakt: **metoda Zieglera-Nicholsa nie pozwala na osiągniecie zadanych wymagań jakościowych**.

- Transmitancja układu otwartego

$$G_o(s) = \left(K_p + K_d s + \frac{K_i}{s}\right) G(s)$$

- Jeśli $G(s)$ jest typu n to typ $G_o(s)$ jest $n+1$
- K_i może być znalezione z wymagań na błąd w stanie ustalonym, ponieważ

$$K_{n+1} = s^n K_i G(s)|_{s=0} = \frac{1}{e_{ss}}$$

gdzie K_{n+1} jest stałą uchybu

- Fakty (układ zamknięty vs. układ otwarty)

$$\omega_n \simeq \omega_{gc} \qquad \zeta = f(PM)$$

- dla znanego K_i ($|G(j\omega_{gc})| = 1$ i $\theta(\omega_{gc}) = -180^o + PM$)

$$\left(K_p + j\omega_{gc}K_d + \frac{K_i}{j\omega_{gc}}\right) G(j\omega_{gc}) = 1e^{j\theta(\omega_{gc})}$$

czyli

$$K_p + j\omega_{gc}K_d = \frac{1e^{j\theta(\omega_{gc})}}{G(j\omega_{gc})} + j\frac{K_i}{\omega_{gc}} = R + jX$$

- Ostatecznie $K_p = R$ i $K_d = \frac{X}{\omega_{gc}}$

Przykład

Dany jest obiekt

$$G(s) = \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)}$$

a wymagania jakościowe regulacji to

- przeregulowanie POS$= 10\%$
- czas regulacji $T_s = 2sec.$
- $e_{ss_{ramp}} \leqslant 10\%$ - błąd w stanie ustalonym dla sygnału liniowo narastającego

- $G(s)$ jest typu 1, a więc liczymy stałą uchybu K_2

$$K_2 = sK_iG(s)|_{s=0} = 2K_i = \frac{1}{0.1} = 10 \rightarrow K_i = 5$$

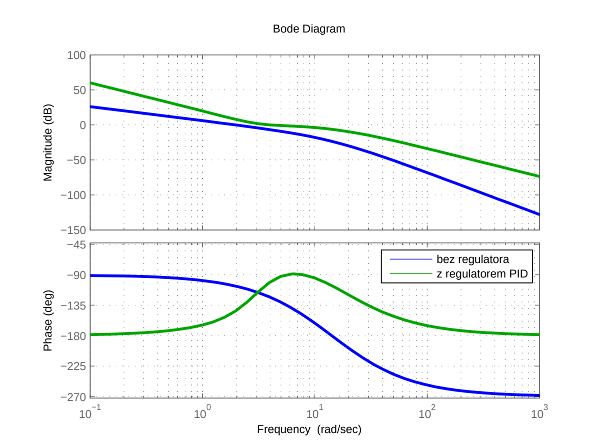
- dla zadanych POS i T_s możemy wyznaczyć dla układu zamkniętego

$$\zeta = \frac{-\ln(POS/100)}{\sqrt{(}\pi^2 + ln^2(POS/100))} \simeq 0.6\omega_n \simeq \frac{4.6}{\zeta T_s} \simeq 4rad/sec$$

- dlatego $\omega_{gc} = 4rad/sec$ oraz

$$PM = \mathrm{tg}^{-1} \frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}} \simeq 60^o$$

Rozwiązanie: $K_i = 5,\ K_p = 2.02,\ K_d = 0.52$



Odpowiedź skokowa